$$\begin{cases} x'(t) = k(a-x)(b-x) \\ x(0)=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a>0 \quad a\neq b \\ b>0 \end{array}$$

($k>0$ da determinare)

$\downarrow$ integr. generale

$$\frac{1}{b-a}\int\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right)dx = kt + c$$

$$\frac{1}{b-a}\left(\ln|x-b| - \ln|x-a|\right) = kt+c$$

$$\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right| = kt+c$$

$$\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right| = (b-a)(kt+c)$$

Ricavo c

$$\ln\left|\frac{0-b}{0-a}\right| = (b-a)(0+c)$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

nelle ipotesi assegnate $x-a$ e $x-b$ sono concordi e $x(0)=0$

$$\ln\left(\frac{x-b}{x-a}\right) = (b-a)\left(kt+\frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) =$$

$$= k(b-a)t + \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\frac{x-b}{x-a} = e^{k(b-a)t+\ln(b/a)} = \frac{b}{a}e^{k(b-a)t}$$

$$\frac{x-b}{x-a} = \frac{b}{a}e^{k(b-a)t}$$

$$(x-b) = \frac{b}{a}e^{k(b-a)t}(x-a)$$

$$x\left(1-\frac{b}{a}e^{k(b-a)t}\right) = b - b\,e^{k(b-a)t}$$

$$x = \frac{ab\left(1-e^{k(b-a)t}\right)}{a-b\,e^{k(b-a)t}} \cdot \frac{e^{k(a-b)t}}{e^{k(a-b)t}}$$

$$= ab\,\frac{e^{k(a-b)t}-1}{a\,e^{k(a-b)t}-b}$$

Fine dell'esercizio della volta precedente altra eq. diff. lin. del 1° ordine a variab. separabili

$y' = 2t(1-y^2)$ $\quad a(t) = 2t \quad \mathbb{R}$

$b(y) = 1-y^2 \quad \mathbb{R}$

→ soluzioni costanti : $1-y^2=0$

$\Rightarrow y(t) = \pm 1$ def. su $\mathbb{R}$

→ $y^2 \neq 1$

$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy$

$\int \frac{y' \, dt}{1-y^2} = \int 2t \, dt$

$\int \frac{dy}{1-y^2} = t^2 + c$

$\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1}\right) dy = t^2 + c$

$\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = 2t^2 + 2c$

$\Updownarrow$

$\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = e^{2t^2+2c}$

Ricordo che

$|z| = k$

$\Rightarrow z = \pm k$

$\Updownarrow$

$\frac{y+1}{y-1} = \pm e^{2t^2+2c}$

$e^{2t^2+2c} = \underline{e^{2c}} \cdot e^{2t^2}$

$0 < e^{2c}$

$\Updownarrow$

$\frac{y+1}{y-1} = \pm e^{2c} \cdot e^{2t^2}$

$\pm e^{2c} = A$

$\in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$\Updownarrow$ $\frac{y+1}{y-1} = A e^{2t^2}$ con $A \neq 0$

ma per $A = 0$ trovo la sol. cost.

$y = -1$

quindi tolgo la limitazione $A \neq 0$

$\Rightarrow$ l'integrale generale è della forma

$\frac{y+1}{y-1} = A e^{2t^2}$ con $A \in \mathbb{R}$

$y+1 = A e^{2t^2}(y-1)$

$y(1 - Ae^{2t^2}) = -1 - Ae^{2t^2}$

$y = \frac{1 + Ae^{2t^2}}{Ae^{2t^2} - 1}$

questa legge potrebbe essere definita su tutto $\mathbb{R}$ oppure su aperti

se $A < 0$ è def su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ dominio massimale della soluzione è $\mathbb{R}$.

se $A \geq 0$ $\quad e^{2t^2} = \frac{1}{A}$ ha ~~2~~ soluzioni, se $\ln A < 0$

$2t^2 = -\ln A \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{-\ln A}{2}}$

se $\ln A < 0$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL 1° ORDINE

L'eq. di Verhulst è un'aggiustamento della più celebre (anche se meno adeguata) equazione di MALTHUS (1798):

(*) $$N'(t) = \varepsilon N(t)$$

che si ottiene osservando che (se trascuro la capacità dell'ambiente) la funzione $(\lambda-\mu)N(t)$ esprime l'incremento – o la diminuzione – di popolazione nell'unità di tempo, cioè

$$(\lambda-\mu)N(t) = \frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$$

e facendo tendere a 0 il Δt.

Un'eq. come la (*) viene detta eq. diff. LINEARE del 1° ordine OMOGENEA.

In generale parlo di eq. diff. LINEARE del 1° ordine quando nell'equazione che lega $y(t)$ e $y'(t)$ queste due funzioni compaiono con grado 1: dunque quando hanno la forma

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \quad \text{con } a(t) \text{ e } f(t) \text{ continue su } I \subset \mathbb{R}$$

Se $f(t)=0$ si parla di EQUAZIONE OMOGENEA

Altrimenti " " " COMPLETA.

TEOREMA: L'integrale generale dell'equazione completa

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

si ottiene aggiungendo all'integrale generale della omogenea associata

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

una soluzione particolare di quella completa

STESSA SITUAZIONE CHE NEI SISTEMI LINEARI

DIM. (I) Sia $\bar{y}(t)$ sia una soluzione di

(1) $\quad y' + a(t)y = f(t) \quad : \bar{y}'(t) = -a(t)\bar{y}(t) + f(t)$

e $z(t)$ sia una soluz. di

(2) $\quad y' + a(t)y = 0 \quad : z'(t) = -a(t)z(t)$

Allora $y(t) = \bar{y}(t) + z(t)$ è soluzione di (1). Infatti

$$y'(t) = \bar{y}'(t) + z'(t) = \underbrace{-a(t)\bar{y}(t)} + f(t) \underbrace{- a(t)z(t)}$$

$$(\bar{y}+z)'(t) + a(t)(\bar{y}+z) = f(t) \quad : \text{cioè } \bar{y}+z \text{ è sol. di (1)}$$

II) $y(t)$ sia una sol. di (1)

$\bar{y}(t)$ sia la sol. part. vista sopra

mostro che $y(t)-\bar{y}(t)$ è soluz. di (2):

$$(y(t)-\bar{y}(t))' + a(t)(y(t)-\bar{y}(t)) =$$
$$= (y'(t)+a(t)y(t)) - (\bar{y}'(t)+a(t)\bar{y}(t)) = f(t)-f(t) = 0$$

c.v.d.

PROBLEMI

(1°) Come si trovano le soluz. dell'omogenea?

(2°) Come trovo una sol. part.?

Ed 12

Soluzione dell'equazione omogenea

$y'(t) = -a(t)\, y(t)$ è un'equazione a variabili separabili!

Ha una soluzione costante: $y(t) = 0$

mentre se $y(t) \neq 0$ si ha

$\int \frac{dy}{y} = -\int a(t)\,dt$ cioè $\ln|y| = -A(t) + k$, $k \in \mathbb{R}$

($A(t)$ primitiva di $a(t)$)

cioè $y = \pm e^{k} \cdot e^{-A(t)}$ cioè $y = c\, e^{-A(t)}$ con $c \neq 0$.

Dando a c la possibilità di annullarsi, si rappresenta anche la soluzione costante. Quindi l'integrale generale è

$$y(t) = c\, e^{-A(t)} \qquad c \in \mathbb{R}$$

ES. Le soluzioni dell'equazione di Malthus hanno la forma $N(t) = c\, e^{\varepsilon t}$ .... CRESCITA o DECADIMENTO ESPONENZIALE.

Ricerca di una soluzione particolare

Usiamo il metodo DELLA VARIAZIONE DELLA COSTANTE, cioè cerchiamo la soluzione tra le funzioni della forma

$$\bar{y}(t) = c(t)\, e^{-A(t)}$$

ove $c(t)$ non è più costante.

$\bar{y}'(t) = \left(c'(t) - c(t)a(t)\right) e^{-A(t)}$: quindi sostituendo nell'eq. differenziale COMPLETA devo avere

$\left(c'(t) - c(t)a(t)\right) e^{-A(t)} + a(t)c(t)e^{-A(t)} = f(t)$ cioè

$c'(t)\, e^{-A(t)} = f(t)$ o anche $c'(t) = f(t)\, e^{A(t)}$

$\Rightarrow\ c(t) = \int f(t)\, e^{A(t)} dt$

$\Rightarrow\ \bar{y}(t) = e^{-A(t)} \int f(t) e^{A(t)}\, dt$.

Dunque l'integrale generale di

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

ha la forma

$$y(t) = \left(c + G(t)\right) e^{-A(t)}$$

ove: c varia comunque nei numeri reali

$A(t)$ è una primitiva (fissata) di $a(t)$

$G(t)$ è " " " di $f(t)\, e^{A(t)}$

Se voglio risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

basta imporre: $y(t_0) = \left(c + G(t_0)\right) e^{-A(t_0)} = y_0$, cioè

porre : $c = y_0\, e^{A(t_0)} - G(t_0)$

$$\Rightarrow\ y(t) = \Big(y_0\, e^{A(t_0)} + \underbrace{G(t) - G(t_0)}_{\int_{t_0}^{t} f(s) e^{A(s)}\, ds}\Big) e^{-A(t)}$$

scegliendo $A(t)$ in modo che $A(t_0) = 0$ (cioè $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,d$

si perviene alla formula

$$y(t) = y_0\, e^{-A(t)} + \left(\int_{t_0}^{t} f(s)\, e^{A(s)}\, ds\right) e^{-A(t)}$$

in cui la soluzione particolare è vista come somma della soluzione dell'omogenea associata che passa per (t_0, y_0) e di una soluzione particolare passante per $(t_0, 0)$.

Es. $a(t) = a$ costante > 0 : $y'(t) + a\,y(t) = f(t)$

Sol. omog. associata : $y(t) = c\, e^{-at}$

Integrale generale : $y(t) = \left(c + \int f(t)\, e^{at} dt\right) e^{-at}$

Sol. del problema di Cauchy con $y(0) = y_0$:

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \left(\int_0^t f(s)\, e^{as}\, ds\right) e^{-at}$$

$$= y_0 e^{-at} + \boxed{\int_0^t e^{-a(t-s)} f(s)\, ds} \rightarrow \text{REGIME PERMANEN}$$

Esempio

$$y'(t) + 2y(t) = \cos t \qquad a(t)=2,\quad f(t)=\cos t.$$

1) associo l'eq. omogenea

$$z' + 2z = 0 \qquad z' = -2z$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int -2\,dt$$
$$\ln|z| = -2t + c$$
$$|z| = e^{-2t}\cdot e^{c}$$
$$\boxed{z = ce^{-2t}} \quad c\in\mathbb{R}$$

2) soluzione part. con il metodo di variaz. delle costanti:

$$y(t) = c(t)\,e^{-2t}$$
$$y' = c'(t)e^{-2t} - 2e^{-2t}c(t)$$
$$c'e^{-2t} - \cancel{2e^{-2t}c(t)} + \cancel{2c(t)e^{-2t}} = \cos t$$
$$c' = \cos t \cdot e^{2t}$$

2a) calcolo $\int \cos t \cdot e^{2t}\,dt = e^{2t}\operatorname{sen} t + \int 2e^{2t}(-\operatorname{sen} t)\,dt$ $\quad \boxed{ff\ e^{2t}}$

$$= e^{2t}\operatorname{sen} t + 2\left[e^{2t}\cos t - \int 2e^{2t}\cos t\,dt\right] =$$
$$= e^{2t}\operatorname{sen} t + 2e^{2t}\cos t - 4\int e^{2t}\cos t\,dt$$
$$5\int \cos t\, e^{2t}\,dt = e^{2t}(\operatorname{sen} t + 2\cos t) + c$$

una primitiva sarà $C(t) = \dfrac{e^{2t}(\operatorname{sen} t + 2\cos t)}{5}$

2b) $c(t) = \dfrac{e^{2t}(\operatorname{sen} t + 2\cos t)}{5}$

$$\Rightarrow G(t) = \frac{e^{2t}(\operatorname{sen} t + 2\cos t)}{5}\cdot e^{-2t} = \frac{\operatorname{sen} t + 2\cos t}{5}$$

3) l'integrale generale di $y'(t) + 2y(t) = \cos t$ è

$$y(t) = ce^{-2t} + G(t) = ce^{-2t} + \frac{\operatorname{sen} t + 2\cos t}{5}$$

$y(0) = 4$ $\qquad y(0) = ce^{0} + \dfrac{0+2}{5} = 4$

$$\Leftrightarrow \quad c = \frac{18}{5}$$

Il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = \cos t \\ y(0) = 4 \end{cases}$

è risolto dalla funzione

$$y(t) = \frac{18}{5}e^{-2t} + \frac{\operatorname{sen} t + 2\cos t}{5}$$

Ma potevo calcolare la sol. particolare dell'eq. diff. in modo diverso? Esiste una soluzione del tipo

$$\bar{y} = A\cos t + B\operatorname{sen} t \quad ?$$

$$\bar{y}' = -A\operatorname{sen} t + B\cos t$$

Sostituisco in $y' + 2y = \cos t$

$$-A\operatorname{sen} t + B\cos t + 2(A\cos t + B\operatorname{sen} t) = \cos t$$

deve essere una identità in t:

$$A(2\cos t - \operatorname{sen} t) + B(\cos t + 2\operatorname{sen} t) = \cos t$$

riscritta come eq. in $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$:

$$\cos t\,(2A + B - 1) + \operatorname{sen} t\,(2B - A) = 0$$

$\Rightarrow$ i coeff. di $\cos t$ e di $\operatorname{sen} t$ sono $= 0$

$$\begin{cases} 2A + B - 1 = 0 \\ 2B - A = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A = 2B \\ 5B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2/5 \\ B = 1/5 \end{cases}$$

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\operatorname{sen} t$$

ES. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y\operatorname{cotg} x = 2\cos x \\ y(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

ATTENZIONE: la variabile indip. può chiamarsi t ma anche x ecc.

1°) $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ è definita e continua per $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ in intervalli del tipo $(k\pi, (k+1)\pi)$

Poiché la condizione iniziale riguarda un $x = \pi/2$ che sta nell'intervallo $(0, \pi)$, le soluzioni vanno cercate in questo intervallo

2°) sol. dell'omogenea associata: $y = 0$ e:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|\operatorname{sen} x| + c,$$

cioè posto $C = e^c$: $|y| = \dfrac{C}{|\operatorname{sen} x|} \Rightarrow y = \dfrac{k}{\operatorname{sen} x}$ $k \in \mathbb{R}$

3°) sol. particolare (per variazione della costante)

$$\bar{y}(x) = \frac{k(x)}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \bar{y}'(x) = \frac{k'(x)\operatorname{sen} x - \cos x\, k(x)}{(\operatorname{sen} x)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{k'(x)}{\operatorname{sen} x} - \frac{k(x)}{\operatorname{sen} x}\operatorname{cotg} x\right) + \frac{k(x)}{\operatorname{sen} x}\operatorname{cotg} x = 2\cos x$$

$$\Rightarrow k'(x) = 2\operatorname{sen} x\cos x \quad \Rightarrow \quad k(x) = \operatorname{sen}^2 x + c_1$$

e sostituendo:

$$\bar{y}(x) = \operatorname{sen} x + \frac{c_1}{\operatorname{sen} x}$$

4°) integrale generale: $y = \operatorname{sen} x + \dfrac{k_1}{\operatorname{sen} x}$

5°) $y(\pi/2) = 1 + k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = -1$:

$$\boxed{y(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad \text{con } x \in (0, \pi)}$$

Oppure con la formula generale:

$A(x) = \int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + c$: $A(\pi/2) = \ln 1 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

sol. del problema, tenuto conto che in $(0, \pi)$ si ha $\operatorname{sen} x > 0$:

$$y(x) = 0 \cdot e^{-\ln(\operatorname{sen} x)} + \left(\int_{\pi/2}^{x} 2\cos s\, e^{\ln(\operatorname{sen} s)}\,ds\right) e^{-\ln(\operatorname{sen} x)}$$

$$= 0 + \left(\int_{\pi/2}^{x} 2\operatorname{sen} s\cos s\,ds\right)\frac{1}{\operatorname{sen} x} = (\operatorname{sen}^2 x - 1)\cdot\frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad \text{come sopra}$$