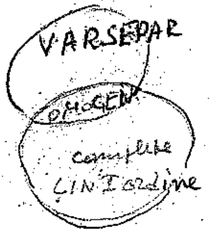
EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Ordine	Tipologia che studiamo
1° (presenti $y(t)$ e $y'(t)$)	1) a variabili separabili $y' = a(t)\,b(y)$ (*) 2) lineari $y' + a(t)y = f(t)$ COMPLETA $z' + a(t)z = 0$ OMOGENEA (caso particol.)
2° (presenti $y(t), y'(t), y''(t)$)	lineari $y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)$ studieremo solo il caso $a(t) = a$ costante $b(t) = b$ "
3° ecc. NO	anche qui ci sarebbero le LINEARI e altro....

(*) NB: le eq. diff. lineari omogenee del 1° ordine SONO EQ A VARIABILI SEPARABILI



MA
equazioni a variabili separabili <u>non</u> sono necessariamente lineari
ed equazioni lineari complete <u>non</u> sono a variabili separabili

Trovare l'integrale generale di

$$y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|}$$

I) Riconoscerla: 1° ordine a variab. separabili.

$$a(t) = 1 \qquad b(y) = 2\sqrt{|y(t)|}$$

II) $a(t)$ è continua su $\mathbb{R}$

$b(y)$ è continua su $\mathbb{R}$ perché composta di funz. cont.

$\Rightarrow$ ogni problema di Cauchy relativo a q. eq. diff. è risolubile. Cioè esiste 1 e 1 sola soluz. dell'eq. diff. t.c.

$$f(x_0) = y_0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R},\ \forall y_0 \in \mathbb{R}$$

III) Risoluzione:

A) $b(y) = 2\sqrt{|y|} = 0 \iff y = 0 \Rightarrow$ sol particolare: $y(t) = 0$

B) $b(y) \neq 0$: $\displaystyle\int \frac{y'\,dt}{2\sqrt{|y|}} = \int 1 \cdot dt \qquad y'\,dt = dy$

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{|y|}} = \begin{cases} \boxed{y>0} = \displaystyle\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \sqrt{y} + c \\ \boxed{y<0} = -\displaystyle\int \frac{-dy}{2\sqrt{-y}} = -\sqrt{-y} + c \end{cases}$$

Torno all'eq. diff.:

$\boxed{y>0}$: $\sqrt{y} = t + c \Rightarrow \begin{cases} y = (t+c)^2 \\ t+c > 0 \end{cases}$

$\boxed{y<0}$: $-\sqrt{-y} = t + c \Rightarrow \begin{cases} -y = (t+c)^2 \\ t+c < 0 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\sqrt{-y} = -(t+c)$

se $y>0$ l'integrale generale ha la forma

$$y(t) = (t+c)^2 \quad \text{con } t \in (-c, +\infty).$$

se $y=0$ l'integrale è $y(t)=0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

se $y<0$ l'integrale generale ha la forma

$$y(t) = -(t+c)^2 \quad \text{con } t \in (-\infty, -c)$$

se la condi. di Cauchy fosse:

$$\begin{cases} y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

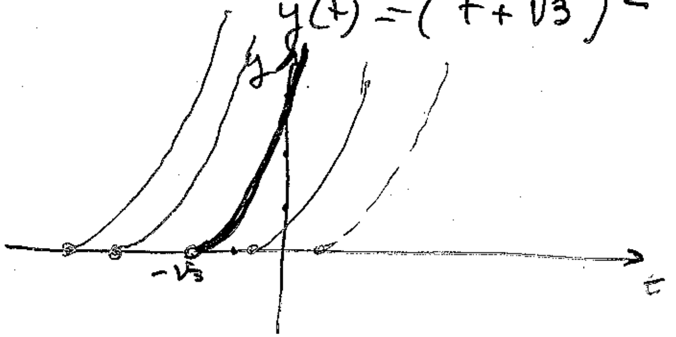
la soluz. $y(t)$ almeno per $t=0$ deve essere >0

$\Rightarrow$ scelgo il I integrale generale. Preciso e:

se $\sqrt{y} = t+c$, per $t=0$ si avrà $\sqrt{3} = 0+c$

Allora la sol. del probl. di Cauchy è

$$y(t) = (t+\sqrt{3})^2 \quad \text{con } t \in (-\sqrt{3}, +\infty)$$



in generale se $y(0)>0$ avrò soluzioni di questo tipo (in rosso)

Se il probl. di Cauchy fosse

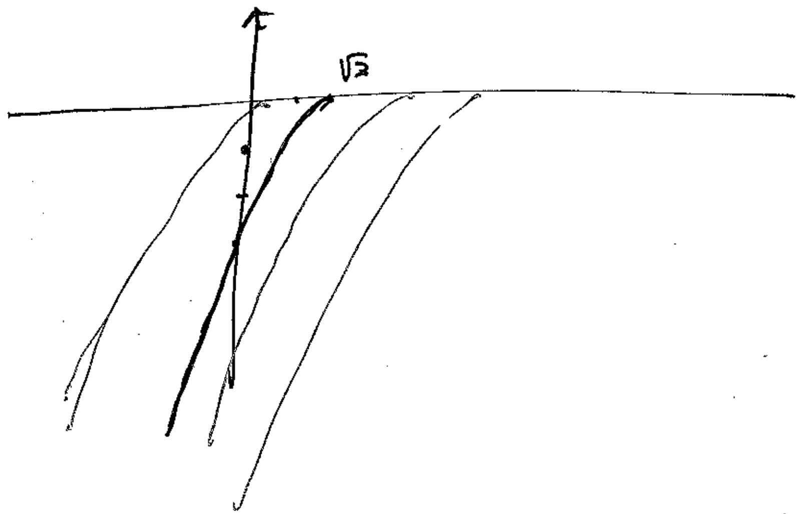
$$\begin{cases} y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|} \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

scelgo il III integrale $(y<0)$

preciso e ricordando che $(-\sqrt{-y} = t+c)_{\substack{t=0 \\ y=-3}}$

$$-\sqrt{3} = 0+c \quad \Rightarrow \quad c = -\sqrt{3}$$

$$y(t) = -(t-\sqrt{3})^2 \quad \text{con } t \in (-\infty, +\sqrt{3})$$



Esercizio: Risolvere il problema di Cauchy dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y'(t) = -y^2(t) \cdot e^t \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Eq. diff. lin. del 1° ordine

$$y' + a(t)y = f(t)$$

a(t) continua
f(t) " su intervalli comuni

basta trovare le sol. dell'omog. associata

$$z'(t) + a(t)z(t) = 0$$

e sommarle ad una soluzione particolare dell'eq. completa da calcolare IN QUALCHE MODO.

variazione delle costanti..

$$y' + ty = t$$ Eq diff. lineare completa.

Posso passare a diff. lin. omogenea

$$y' + t(y-1) = 0$$ Soluz: $y(t) = 1 + ke^{-t^2/2}$

se pongo $w = y - 1$, $w' = y'$ e quindi mi posso ricondurre a

$$w' + tw = 0$$: diff lin. 1 ordine OMOGENEA.

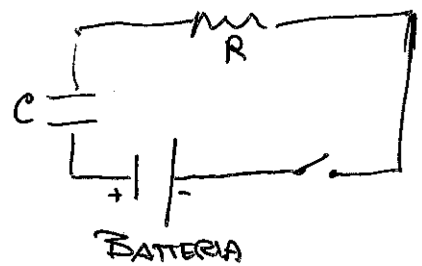
$$w' = -tw \qquad w = 0$$

$$\int \frac{w'}{w}dt = -\int t\,dt$$

$$\ln|w| = -\frac{t^2}{2} + c \Rightarrow$$

$$|w| = e^{-t^2/2 + c} \Rightarrow w(t) = ke^{-t^2/2}$$
$k \in \mathbb{R}$

Circuito R-C



q valore istantaneo della carica nel processo di carica

R resistenza

C capacità del condensat.

I intensità della corrente nel circuito

Differenza di potenziale alle estremità del condens. $-\frac{q}{C}$

Diff. di potenziale all'estremità del resistore $-IR$

$\mathcal{E}$ = energia nel circuito

$$\boxed{\mathcal{E} - \frac{q}{C} - IR = 0}$$

$\mathcal{E} = I_0 R$

all'istante iniziale $t=0$: $q=0$

invece: $I = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{q}{C} \Rightarrow$ carica massima $Q = \mathcal{E}C$.

Cerco $q = q(t)$, tenendo presente che

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$\boxed{\mathcal{E} - \frac{q}{C} - q'R = 0}$$ eq. diff. lineare del 1° ordine completa.

$$\begin{cases} q' + \dfrac{q}{RC} = \dfrac{\mathcal{E}}{R} \\ q(0) = 0 \end{cases}$$

Problema di Cauchy.

Conviene per risolvere l'eq. diff. pensarla come eq. diff. lineare OMOGENEA in variabili ≠

$$\begin{cases} q' + \dfrac{q - \mathcal{E}C}{RC} = 0 \\ q(0) = 0 \end{cases}$$

penso quindi come funzione incognita $q - \mathcal{E}C$ e la sua derivata $q' - 0 = q'$

$$\begin{cases} q' + \dfrac{1}{RC}(q - \mathcal{E}C) = 0 \\ q(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q - \mathcal{E}C = k\, e^{-\frac{1}{RC}\cdot t} \\ q(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 - \mathcal{E}C = k \\ q - \mathcal{E}C = -\mathcal{E}C e^{-\frac{1}{RC}t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)}$$

$$I(t) = q'(t) = \frac{\mathcal{E}\cancel{C}}{R\cancel{C}} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$y' + 10y = 1 - t^2$ come si trova l'integrale generale?

È lineare del 1° ordine completa. È a coeff. costanti

La soluz. dell'omog. associata è $z(t) = ke^{-10t}$, $k \in \mathbb{R}$

Cerco una soluzione della completa.

Visto che $f(t) = 1 - t^2$ è un polinomio di 2° grado cerco le soluzioni tra i polinomi di 2° grado: $\bar{y}(t) = at^2 + bt + c$

$\bar{y}'(t) = 2at + b$

Sostituisco

$$2at + b + 10(at^2 + bt + c) = 1 - t^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(10a+1)t^2 + (2a+10b)t + b + 10c - 1 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10a + 1 = 0 \\ 2a + 10b = 0 \\ b + 10c - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a = -1 \\ 2a + 10b = 0 \\ b + 10c = 1 \end{cases}$$

$a = -1/10$, $b = 1/50$, $10c = 1 - \frac{1}{50}$

$c = \frac{49}{500}$

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{50}t + \frac{49}{500}$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{50}t + \frac{49}{500} + ke^{-10t}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$y' + y = e^t + t$ lineare del 1° ordine completa

Soluz. omog. associata $y' = ke^{-t}$

Soluzione particolare?

$y_1(t)$ che sia soluzione di $y' + y = e^t$

$y_2(t)$ che sia soluzione di $y' + y = t$

$y_1(t) + y_2(t)$ è soluzione dell'eq. data?

Verifichiamo: la sua derivata è $y_1' + y_2'$

$$(y_1' + y_2') + (y_1 + y_2) = (y_1' + y_1) + (y_2' + y_2) = e^t + t$$

Sì!

Sol part. di $y'+y=e^t$

provo con ce^t
la sua derivata è ce^t $\Rightarrow$ $ce^t+ce^t=e^t$

$2ce^t=e^t$

$\Rightarrow 2c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{2}$

$$y_1(t)=\frac{1}{2}e^t$$

Sol part. di $y'+y=t$

provo con $a+bt$
la sua derivata è b $\Rightarrow$ $b+a+bt=t$

$\Downarrow$

$(b+a)+(b-1)t=0$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} b-1=0 \\ b+a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b=1 \\ a=-1 \end{matrix}$$

$$y_2(t)=t-1$$

Soluz. particolare di $y'+y=e^t+t$ sarà

$$\bar{y}(t)=t-1+\frac{1}{2}e^t$$

Integrale generale: $y(t)=t-1+\frac{1}{2}e^t+ke^{-t}$

Risolvere il probl. di Cauchy

$$\begin{cases} y'+2ty^2=0 \\ y(0)=-1 \end{cases}$$

I) Riconoscimento eq. diff. del 1° ordine a var. sep.

$$y'=-2ty^2$$

$a(t)=2t$ $\quad b(y)=-y^2$
continue su $\mathbb{R}$. $\Rightarrow$ sol. del problema di Cauchy esiste ed è unica.

$b(y)=0 \Leftrightarrow y=0$: sol. particolare

$$\int -\frac{y'}{y^2}\,dt=\int 2t\,dt$$

$$\int -\frac{dy}{y^2}=t^2+c \Rightarrow \frac{1}{y}=t^2+c$$

$\Rightarrow$ andiamo a imporre la cond. di Cauchy:

$$\frac{1}{-1}=c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}=t^2-1$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{1}{t^2-1}$$ legge che è definita in $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

La soluzione del probl. di Cauchy deve essere definita in un intervallo che contiene 0 $\Rightarrow$

$\boxed{\text{la soluz. del probl. di Cauchy è } y(t)=\frac{1}{t^2-1} \quad t\in(-1,1)}$

$$\begin{cases} y' = \frac{2t}{t^2-1} y + t \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

trovare la soluzione del problema di Cauchy

Eq diff. del 1° ordine lineare completa.

Insieme di def. di $a(t) = \frac{2t}{t^2-1}$ è

$(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty) \Rightarrow$ le soluzioni avranno come dominio l'intervallo $(1,+\infty)$ perché questo contiene $t=2$.

Sol. dell'omogenea associata.

$$z' = \frac{2t}{t^2-1} z \qquad \to z=0$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2t}{t^2-1} dt$$

$\ln|z| = \ln|t^2-1| + c$ in $(1,+\infty)$ posso riscrivere

$\ln|z| = \ln(t^2-1) + c$

considero l'esponenziale dei 2 membri

$|z| = e^c e^{\ln(t^2-1)} \Rightarrow z = k(t^2-1)$

$k = \pm e^c$ oppure $k=0 \Rightarrow k \in \mathbb{R}$ qque

Soluz. particolare.

$\bar{y}(t) = k(t)(t^2-1)$

$\bar{y}'(t) = k'(t^2-1) + 2tk$

sostituisco in $y' = \frac{2t}{t^2-1} y + t$

$$k'(t^2-1) + \cancel{2tk} = \cancel{\frac{2t}{t^2-1} k (t^2-1)}$$

$$k'(t) = \frac{t}{t^2-1} \qquad k(t) = \frac{1}{2}\ln|t^2-1| + c$$

$$t \in (1,+\infty) \quad : \quad k(t) = \frac{1}{2}\ln(t^2-1) + c$$

la soluz. particolare ha forma

$$\bar{y}(t) = \frac{(t^2-1)}{2} \ln(t^2-1)$$

$\Rightarrow$ Integrale generale:

$$y(t) = \frac{t^2-1}{2} \ln(t^2-1) + k(t^2-1)$$

$y(2) = 1$

$$1 = \frac{3}{2}\ln 3 + 3k \qquad k = \frac{1-\frac{3}{2}\ln 3}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln 3$$

Soluz. del probl di Cauchy:

$$y(t) = \frac{t^2-1}{2} \ln(t^2-1) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln 3\right)(t^2-1)$$

sul dominio massimale $(1,+\infty)$