## EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 2° ORDINE

Hanno la forma $F(t, y(t), y'(t), y''(t)) = 0$.

Ogni funzione $\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due volte derivabile in $I$ e tale che

$$\forall t \in I: \; F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)) = 0$$

si dice soluzione dell'eq. diff. di 2° ordine.

Si prova che l'integrale generale di un'eq. diff. del 2° ordine è costituito da una FAMIGLIA di funzioni dipendente da 2 parametri $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Questo è il motivo per cui per risolvere il problema di Cauchy dovremo dare 2 condizioni iniziali (VEDI il caso dell'eq. che coinvolge l'accelerazione in cui si danno spostamento e velocità iniziali).

In particolare si dicono EQ. DIFF. LINEARI del 2° ORDINE quelle della forma

(1) $$y''(t) + a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = f(t)$$

con $a(t), b(t), f(t)$ continue su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$.

Anche in questo caso, l'integrale generale dell'equazione diff. completa si ottiene sommando una soluzione particolare di (1) all'integrale generale dell'eq. differ. OMOGENEA ASSOCIATA

(2) $$y''(t) + a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = 0$$

Non ci sono però formule generali "belle" come nel caso del 1° ordine.



Fatti:

1) se $z_1(t)$ e $z_2(t)$ sono solut. dell'equazione omog. anche $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lo è

2) se queste due soluzioni sono tali che $\boxed{\forall t \in I}$

WRONSKIANO $\longrightarrow$ $\begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$ commenti sulla pagina seguente (*)

allora le soluzioni dell'EQ. OMOGENEA sono (tutte e) sole quelle del tipo $C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

**Caso particolare : $a(t) = a$ $b(t) = b$ COSTANTI**

L'equazione

$$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = 0$$

ha qualche soluzione della forma $e^{rt}$ (come succede nel caso delle lineari di 1° ordine)?

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= e^{rt} \\ y'(t) &= r e^{rt} \\ y''(t) &= r^2 e^{rt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

la $y(t)$ è soluzione se e solo se $\forall t \ldots$ $(r^2 + ar + b)e^{rt} = 0$ cioè se e solo se

$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$ : equazione caratteristica dell'eq. differenziale

- Se $\Delta = a^2 - 4b > 0$ ci sono due radici reali distinte $r_1, r_2$

$z_1(t) = e^{r_1 t}$ e $z_2(t) = e^{r_2 t}$ sono tali che $\begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} \neq 0$ comunque si scelga $t$ $\Rightarrow$ le soluzioni sono tutte e sole del tipo $c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$.

verifica estesa a pag seguente (1)

Ad es. $y''(t) - k^2 y(t) = 0$ con $k \neq 0$ ha associata l'equazione $r^2 - k^2 = 0$ che ha le radici $r = \pm k$. Allora l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea è

$$c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}$$

(*) $z''(t) + a(t)\, z'(t) + b(t)\, z(t) = 0$

$z_1$ è soluz. $\Leftrightarrow$
$$z_1'' + a z_1' + b z_1 = 0$$

$z_2$ è soluz $\Leftrightarrow$
$$z_2'' + a z_2' + b z_2 = 0$$

$z(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$z'(t) = c_1 z_1' + c_2 z_2'$

$z''(t) = c_1 z_1'' + c_2 z_2''$

$c_1 z_1'' + c_2 z_2'' + a(c_1 z_1' + c_2 z_2') + b(c_1 z_1 + c_2 z_2) =$

$c_1 \underbrace{(z_1'' + a z_1' + b z_1)}_{0} + c_2 \underbrace{(z_2'' + a z_2' + b z_2)}_{0} = 0$

---

Se $z_1 = c z_2$ allora $z_1' = c z_2'$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c z_2 & z_2 \\ c z_2' & z_2' \end{vmatrix} = c z_2 z_2' - c z_2 z_2' = 0$$

Se il Wronskiano è $= 0$ :

$$z_1 z_2' = z_1' z_2 \quad \forall t \in I$$

$\Rightarrow \dfrac{z_2'}{z_1'} = \dfrac{z_2}{z_1}$ si può capire che con qualche altro ragionamento si arriva a provare che:

$$z_2 = c z_1$$

se $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = \underbrace{(r_2 - r_1)}_{\neq 0} \underbrace{e^{(r_1 + r_2)t}}_{\neq 0} \neq 0$$

---

Eq. caratt. $r^2 + ar + b = 0$

- $\Delta = a^2 - 4b < 0$

$$r_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

sotto radice c'è un numero $<0$

è un numero complesso.

$$r_{1,2} = \underbrace{-\frac{a}{2}}_{\in \mathbb{R}} \pm \frac{\sqrt{(-1)(-\Delta)}}{2} =$$

$$\underbrace{-\frac{a}{2}}_{\in \mathbb{R}} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}_{\in \mathbb{R}} \sqrt{-1}$$

SIMBOLO $\Downarrow$ $i$

$$= \underbrace{\alpha}_{\in \mathbb{R}} \pm \underbrace{\beta}_{\in \mathbb{R}} i$$

$\alpha = -a/2$

$\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$

$\Downarrow$

Come soluzioni particolari prendo $e^{\alpha t} \cos \beta t$ E $e^{\alpha t} \sin \beta t$ : sono indipendenti (vedi WRONSKIANO)

$\Rightarrow$ le sol. dell'eq. omogenea in questo caso sono

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$$

[A PAG DOPO: STESSI CONTI CON I NUMERI COMPLESSI]

Cont.

- Se $\Delta = a^2 - 4b < 0$ ci sono due radici complesse coniugate $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. Allora

$e^{r_1 t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t)$ ; $e^{r_2 t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t)$

sono due soluzioni complesse dell'equazione differ. omogenea .... Se le voglio reali basta prendere

$$\frac{1}{2}\left(e^{r_1 t} + e^{r_2 t}\right) = e^{\alpha t}\cos\beta t \quad e \quad \frac{1}{2i}\left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\right) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$$

VERIFICA per la prima soluzione:

se $z(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$

$z'(t) = e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta \operatorname{sen}\beta t)$

$z''(t) = e^{\alpha t}(\alpha^2\cos\beta t - \alpha\beta \operatorname{sen}\beta t - \alpha\beta\operatorname{sen}\beta t - \beta^2\cos\beta t)$

$$z''(t) + a z'(t) + b z(t) = e^{\alpha t}\Big(\underbrace{(\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b)}_{=0}\cos\beta t - \underbrace{(2\alpha\beta + a\beta)}_{=0}\operatorname{sen}\beta t\Big) = 0$$

infatti per ipotesi $(\alpha + i\beta)^2 + a(\alpha + i\beta) + b = 0$ Re e Im

Anche qui $\begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \\ e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta\operatorname{sen}\beta t) & e^{\alpha t}(\alpha\operatorname{sen}\beta t + \beta\cos\beta t)\end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha t} \neq 0 \ \forall t.$

Dunque l'integrale generale avrà la forma:

$$c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t.$$

Da notare che posso leggere $\dfrac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$ e $\dfrac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$ come coseno e seno di un angolo $\varphi$ e posto $A = \sqrt{c_1^2+c_2^2}$ mi riconduco a

$$e^{\alpha t} A \cos(\beta t - \varphi) \qquad A, \varphi \text{ qualsiasi}$$

Ad. es. $y''(t) + k^2 y(t) = 0$ ha associata l'equazione $r^2 + k^2 = 0$ cioè $r = \pm k i$; dunque l'integrale generale ha la forma $c_1 \cos kt + c_2 \operatorname{sen} kt$ o anche

$$A\cos(kt - \varphi)$$

Un altro esempio:

$$y'' - y' + y = 0$$

2° ordine lineare omogenea

eq. caratt. $r^2 - r + 1 = 0$

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

le soluzioni eq diff. sono della forma

$$c_1 e^{\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 e^{\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

oppure posto $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e

$$\cos\varphi = \frac{c_1}{A} \qquad \operatorname{sen}\varphi = -\frac{c_2}{A}$$

la soluz. assume l'aspetto

$$A e^{\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi\right)$$

- se $\Delta = a^2 - 4b = 0$ c'è un'unica radice (doppia) per $\boxed{z^2 + az + b = 0}$

$z = -a/2$. Allora una soluzione è $e^{-(a/2)t}$.

Per trovare un'altra sol. indipendente da questa:

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI:

Cerco $z(t) = c(t)\, e^{-a/2 t}$ che sia soluzione:

$$z'(t) = \left(c'(t) - \frac{a}{2} c(t)\right) e^{-a/2 t}$$

$$z''(t) = \left(c''(t) - \frac{a}{2} c'(t) - \frac{a}{2} c'(t) + \frac{a^2}{4} c(t)\right) e^{-a/2 t}$$

e quindi sostituendo nell'eq. diff.:

$$\left(c''(t) - a\cancel{c'(t)} + \frac{a^2}{4} c(t) + a\cancel{c'(t)} - \frac{a^2}{2} c(t) + \frac{a^2}{4} c(t)\right) e^{-a/2 t} = 0$$

cioè

$$c''(t) = 0$$
$$c'(t) = c_1$$
$$c(t) = c_1 t + c_2$$

Quindi una seconda soluzione indipendente(*) da $e^{-a/2 t}$ è $t e^{-a/2 t}$ e l'integrale generale è

$$(c_1 t + c_2)\, e^{-a/2 t}$$

(*) (Verifico che anche le due soluzioni $t e^{-a/2 t}$ e $e^{-a/2 t}$ sono indipendenti: $\begin{vmatrix} t e^{-a/2 t} & e^{-a/2 t} \\ (1 - a/2\, t) e^{-a/2 t} & -\frac{a}{2} e^{-a/2 t} \end{vmatrix} = -e^{-at} \neq 0 \ \forall t$)

## Ricerca delle soluzioni particolari dell'equazione completa

Si può sempre cercare di usare il metodo di variazioni delle costanti. Ma quando $f(t)$ ha una forma che ricorda quella delle possibili soluzioni dell'omogenea:

polinomio ; $e^{\lambda t}$ ; $e^{\lambda t} \cos \omega t$ oppure $e^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t$

si può far di meglio.

- $f(t)$ polinomio di grado $r$

1) se in $y'' + ay' + by = f(t)$ è $\boxed{b \neq 0}$ si cerca polinomio di grado $r$
2) " è $\boxed{b = 0,\ a \neq 0}$ si cerca polinomio di grado $r+1$
3) " è $\boxed{b = 0 = a}$ si cerca polinomio di grado $r+2$

- Vediamo un esempio significativo:

$$y'' - k^2 y = 1 + t^2, \quad k \neq 0$$

cerco una sol. particolare del tipo $\bar{y}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$

$(\Rightarrow \bar{y}'(t) = c_1 + 2c_2 t \Rightarrow \bar{y}''(t) = 2c_2)$ : $2c_2 - k^2(c_0 + c_1 t + c_2 t^2) \equiv 1 + t^2$

$\Rightarrow 2c_2 - k^2 c_0 - 1 - k^2 c_1 t - t^2(k^2 c_2 + 1) \equiv 0 \Rightarrow$ $c_1 = 0$, $c_2 = -1/k^2$, $c_0 = \frac{-2/k^2 - 1}{k^2} = \frac{-(2+k^2)}{k^4}$

cioè una sol. particolare è

$$\frac{-(2+k^2)}{k^4} - \frac{1}{k^2} t^2$$

Soluzione generale: $-\frac{2+k^2}{k^4} - \frac{1}{k^2} t^2 + c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}$

- Esempio meno significativo: $y'' + 2y' = \boxed{4t}$ ← grado 1

cerco sol. particolare del tipo $\bar{y}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ ← grado 2

cioè sostituendo $2c_2 + 2c_1 + 4c_2 t = 4t$ $\Rightarrow c_2 = 1$, $c_1 = -c_2 = -1$, $c_0$ arbitrario

Sol. part. $\bar{y}(t) = -t + t^2$ — Sol. omog.: $z^2 + 2z = 0 \Rightarrow z(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{0}$

Sol. generale $y(t) = -t + t^2 + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{0}$

$$c''(t) + c'(t)(2\lambda+a) + c(t)(\lambda^2+\lambda a+b) = 1$$

$\boxed{\lambda^2+\lambda a+b \neq 0} \Rightarrow \quad c = \dfrac{1}{\lambda^2+\lambda a+b} \quad c'=0 \quad c''=0$

$\boxed{\lambda^2+\lambda a+b=0}$ cioè $\lambda$ è una delle soluz dell'eq. caratteristica dell'omog. ass. $r^2+ar+b=0$

$$c''(t) + c'(t)(2\lambda+a) = 1$$

$\boxed{\text{se } 2\lambda+a\neq 0}$ $c'(t) = \dfrac{1}{2\lambda+a}$ costante $\Rightarrow c''=0$

prendo $c(t) = \dfrac{t}{2\lambda+a}$

se $\begin{cases} \lambda^2+\lambda a+b=0 \\ 2\lambda+a=0 \end{cases}$

$c''(t) = 1$
$c'(t) = t$
$c(t) = \dfrac{t^2}{2}$

ESEMPIO

$y'' - y = e^{2t}$ $\qquad r^2-1=0 \quad r_{1,2}=\pm 1$
$\lambda = 2 \neq r_{1,2}$

una soluz particolare avrà la forma.

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{4-1}\cdot e^{2t} = \frac{1}{3}e^{2t}$$

Verifica:
$\bar{y}'(t) = \frac{2}{3}e^{2t} \qquad \bar{y}''(t) = \frac{4}{3}e^{2t}$

$\frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{2t} = e^{2t}$

Integrale generale: $\frac{1}{3}e^{2t} + c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$



- $f(t) = e^{\lambda t}$ ($\lambda$ anche complesso)

cerco sol. part. del tipo $\boxed{\bar{y}(t) = c(t)e^{\lambda t}}$ $\quad (\Rightarrow \bar{y}' = (c'(t)+\lambda c(t))e^{\lambda t}$
$\bar{y}'' = (c''(t)+2\lambda c'(t)+\lambda^2 c(t))e^{\lambda t})$

Sostituisco: $\cancel{e^{\lambda t}}(c''(t)+c'(t)(2\lambda+a)+c(t)(\lambda^2+\lambda a+b)) = \cancel{e^{\lambda t}}\,1$

Basta una $c(t)$ qualunque:

se $\boxed{\lambda^2+\lambda a+b\neq 0}$ prendo $c(t) = \dfrac{1}{\lambda^2+\lambda a+b}$

se $\boxed{\lambda^2+\lambda a+b=0,\ 2\lambda+a\neq 0}$ prendo $c'(t) = \dfrac{1}{2\lambda+a} \Rightarrow c(t) = \dfrac{t}{2\lambda+a}$

se $\boxed{\lambda^2+\lambda a+b=0,\ 2\lambda+a=0}$: $\quad c''(t)=1 \Rightarrow c'(t)=t \Rightarrow c(t)=\dfrac{t^2}{2}$

- $f(t) = e^{\lambda t}\cos\omega t$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

(*) $y''+ay'+by = Ae^{\lambda t}\cos\omega t$

oppure

$y''+ay'+by = Ae^{\lambda t}\operatorname{sen}\omega t$

$A\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\omega\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Quasi sempre posso cercare le soluzioni tra quelle della forma

$\bar{y}(t) = c_1 e^{\lambda t}\cos\beta t + c_2 e^{\lambda t}\operatorname{sen}\beta t \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

Ci sono casi in cui non è sufficiente pensare $c_1, c_2$ costanti:

1) $\Delta$ di $r^2+ar+b=0$ è $<0$
2) e $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ oppure $\omega = -\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$

ESEMPIO

$$y'' + y = \cos t$$

$$y'' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + 1 = 0 \qquad r = \pm 1 \cdot i$$

↳ soluz dell'omog. associata

$$z(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t$$

Soluzione particolare?

$\bar{y}(t) = c_1 \cos t + c_2 \,\mathrm{sen}\, t$ non può essere soluzione della complessa, perché è soluzione della omogenea.

$$\tilde{y}(t) = c_1(t)\cos t + c_2(t)\,\mathrm{sen}\, t$$

$$\tilde{y}'(t) = c_1' \cos t - c_1 \,\mathrm{sen}\, t + c_2' \,\mathrm{sen}\, t + c_2 \cos t$$

$$= (c_1' + c_2)\cos t + (c_2' - c_1)\,\mathrm{sen}\, t$$

$$\tilde{y}''(t) = (c_1'' + 2c_2' - c_1)\cos t + (c_2'' - 2c_1' - c_2)\,\mathrm{sen}\, t$$

$$(c_1'' + 2c_2' \cancel{-c_1} \cancel{+c_1})\cos t + (c_2'' - 2c_1' \cancel{-c_2} \cancel{+c_2})\,\mathrm{sen}\, t = \cos t$$

$$\begin{cases} c_1'' + 2c_2' = 1 \\ c_2'' - 2c_1' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1' = \frac{1}{2} c_2'' \\ \boxed{\frac{1}{2} c_2''' + 2c_2' = 1} \end{cases}$$

$$\boxed{c_1' = w(t)} \qquad \frac{1}{2} w''(t) + 2w(t) = 1$$

$$w'' + 4w = 0$$

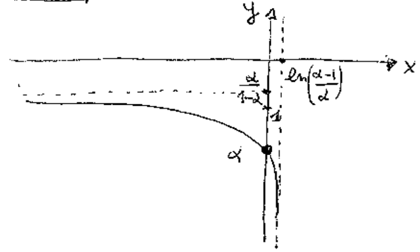
$$k_1 \cos 2t + k_2 \,\mathrm{sen}\, 2t \quad \longrightarrow \quad W(t) = \frac{1}{2} + k_1 \cos 2t + k_2 \,\mathrm{sen}\, 2t$$

ECC.

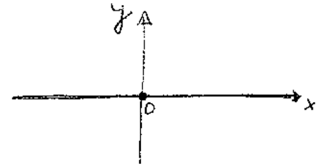
PROBLEMA ASSEGNATO IERI:

Grafici delle soluzioni di $\begin{cases} y'(t) = -y^2(t)e^t \\ y(0) = \alpha \end{cases}$

$\boxed{\alpha < 0}$ ad es. $\alpha = -2$

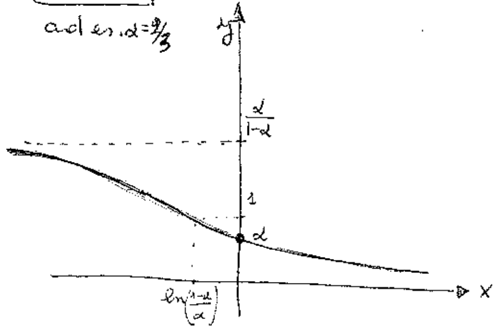



$\boxed{\alpha = 0}$

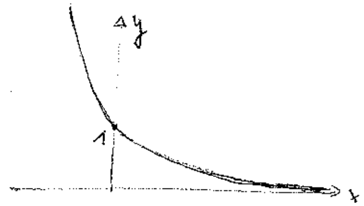



$\boxed{0 < \alpha < 1}$

ad es. $\alpha = 2/3$

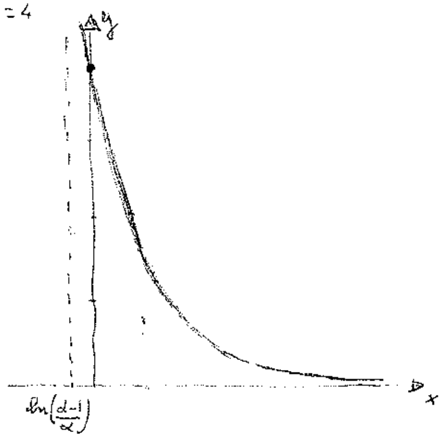



$\boxed{\alpha = 1}$




$\boxed{\alpha > 1}$

ad es. $\alpha = 4$




TRATTEGGIATI GLI ASINTOTI.

NELLA PAG. SEGUENTE: SOLUZIONE e IN QUELLE DOPO CONTI ESTESI SULLA SOL. PARTICOLARE DI EQ DIFF. DI 2° ORD. DELL'ULTIMA FORMA VISTA

Risolvere il problema di Cauchy dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y'(t) = -y^2(t)e^t \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

<u>Sol.</u> Notiamo che l'eq. diff. è del 1° ordine a variabili separabili:

Se $\alpha = 0$ l'unica possibile soluzione è $y(t) = 0$

Se $\alpha \neq 0$, separando le variabili:

$a(t) = e^t$ e $b(y) = -y^2$ sono continue su $\mathbb{R}$

$$\int -\frac{dy}{y^2} = \int e^t dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y(t)} = e^t + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

Poiché $y(0) = \alpha$ si deve avere $\frac{1}{\alpha} = 1 + c$ $\Rightarrow$ la legge soluzione del problema di Cauchy è

$$(*) \qquad y(t) = \frac{1}{e^t - (1 - \frac{1}{\alpha})}$$

1° caso) Se $1 - \frac{1}{\alpha} \leq 0$ (cioè $0 < \alpha \leq 1$) il denominatore è positivo in tutto $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $y(t)$ è definita, continua e derivabile in $\mathbb{R}$ e quindi la soluzione è data dalla funzione che ha per dominio $\mathbb{R}$ e legge la $(*)$

2° caso) Se $1 - \frac{1}{\alpha} > 0$ il denominatore si annulla in $t = \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$. Ci sono quindi due intervalli in cui la legge risulta dar luogo a una funzione continua e derivabile: $I = \left(-\infty, \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right)$ e $J = \left(\ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right), +\infty\right)$: su $I$ tale funzione è $< 0$, su $J$ è $> 0$.

Dunque se $\alpha < 0$ si sceglierà la legge $(*)$ con dominio $I$ come soluzione del problema di Cauchy; Se $\alpha > 1$ si sceglierà la legge $(*)$ con dominio $J$.

Notare che, in entrambi i casi <u>la soluzione è decrescente</u> nel suo intervallo di definizione in quanto $y' = -y^2 e^t < 0$.

Si può anche osservare che $y'' = -2yy'e^t - y^2e^t = y^2e^t(2ye^t - 1) > 0 \Leftrightarrow y > \frac{1}{2}e^{-t}$ cioè mai se $y(t) < 0$, sempre se $\alpha \geq 1$ poiché $2e^t > e^t - \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)$ poiché $e^t > -\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \leq 0$; e per $t > \ln\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$ se $0 < \alpha < 1$: questi sono sottointervalli di convessità

Inoltre se $\alpha < 0$: asintoto orizzontale per $t \to -\infty$: $y = \frac{\alpha}{1-\alpha}$; verticale $x = \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$

Se $0 < \alpha < 1$: asintoto orizz. per $t \to -\infty$: $y = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ e per $t \to +\infty$: $y = 0$

se $\alpha = 1$: asintoto orizzontale per $t \to +\infty$: $y = 0$

Se $\alpha > 1$: asintoto orizzontale per $t \to +\infty$: $y = 0$; verticale: $x = \ln\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)$

SULLE SOLUZIONI PARTICOLARI di

$$y''+ay'+by=Ae^{\lambda t}\cos\omega t \qquad (a,b,\lambda,\omega\in\mathbb{R},\ A\neq 0)$$

In genere basta cercarle tra quelle della forma

$$\bar y(t)= e^{\lambda t}(c_1\cos\omega t + c_2\,\mathrm{sen}\,\omega t) \qquad \text{con } c_1, c_2 \text{ variabili in } \mathbb{R}$$

Infatti

$$\bar y'(t)= e^{\lambda t}(\lambda c_1\cos\omega t+\lambda c_2\,\mathrm{sen}\,\omega t-\omega c_1\,\mathrm{sen}\,\omega t+\omega c_2\cos\omega t)=$$
$$= e^{\lambda t}\left[(\lambda c_1+\omega c_2)\cos\omega t+(\lambda c_2-\omega c_1)\,\mathrm{sen}\,\omega t\right]$$
$$\bar y''(t)= e^{\lambda t}\left[(\lambda^2 c_1+2\lambda\omega c_2-\omega^2 c_1)\cos\omega t+(\lambda^2 c_2-2\lambda\omega c_1-\omega^2 c_2)\sin\omega t\right]$$

Sostituendo nell'equazione differenziale:

$$e^{\lambda t}\Big[(\lambda^2 c_1+2\lambda\omega c_2-\omega^2 c_1+a(\lambda c_1+\omega c_2)+bc_1)\cos\omega t+$$
$$+(\lambda^2 c_2-2\lambda\omega c_1-\omega^2 c_2+a(\lambda c_2-\omega c_1)+bc_2)\sin\omega t\Big]=Ae^{\lambda t}\cos\omega t$$

Semplificando $e^{\lambda t}$ (sempre $\neq 0$) e osservando che si deve avere una identità in $t$, deve risultare

$$\begin{cases}(\lambda^2-\omega^2+a\lambda+b)c_1+(2\lambda\omega+a\omega)c_2=A & \text{(uguaglianza dei coefficienti di } \cos\omega t)\\ -(2\lambda\omega+a\omega)c_1+(\lambda^2-\omega^2+a\lambda+b)c_2=0 & \text{(uguaglianza dei coeff. di } \sin\omega t)\end{cases}$$

Questo è un sistema lineare nelle incognite $c_1, c_2$, risolubile (con soluzione unica) se il suo determinante è diverso da zero.
Quando, invece, il determinante è $=0$?

$$\begin{vmatrix}\lambda^2-\omega^2+a\lambda+b & (2\lambda+a)\omega\\ -(2\lambda+a)\omega & \lambda^2-\omega^2+a\lambda+b\end{vmatrix}=\underbrace{(\lambda^2-\omega^2+a\lambda+b)^2+(2\lambda+a)^2\omega^2}_{\text{"somma di due quadrati = 0"}}=0 \iff$$

$$\iff \begin{cases}\lambda^2+a\lambda+b-\omega^2=0\\ (2\lambda+a)\omega=0\end{cases} \iff \begin{cases}\begin{cases}\lambda^2+a\lambda+b=0\\ \omega=0\end{cases} & \text{: è il caso già studiato per } f(t)=e^{\lambda t}\\[2ex] \begin{cases}\lambda^2+a\lambda+b-\omega^2=0\\ 2\lambda+a=0\end{cases} & \text{: esamino questo caso}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\lambda=-a/2\\ a^2/4-a^2/2+b-\omega^2=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=-a/2\\ \omega^2=\dfrac{4b-a^2}{4}=-\dfrac{\Delta}{4}\end{cases}$$

ove $\Delta$ è il discriminante dell'equazione caratteristica $r^2+ar+b=0$

Quindi il determinante - se $\omega\neq 0$ - può annullarsi solo se $\Delta<0$ e $\omega=\pm\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. In questo caso il sistema diventa $\begin{cases}0c_1+0c_2=1\\ 0c_1+0c_2=0\end{cases}$, cioè è palesemente impossibile. Diventa indispensabile usare il metodo di variazione delle costanti.

Riassumendo, se non siamo in presenza di situazioni più semplici (ad es.: $a=-2\lambda$, che permette di scegliere $c_2=0$; oppure $\omega^2=\lambda^2+a\lambda+b$ che permette di scegliere $c_1=0$):

Data $y''+ay'+by=Ae^{\lambda t}\cos\omega t$

1. se $\omega=0$ ci si riconduce alle soluzioni di $y''+ay'+by=Ae^{\lambda t}$
2. se $\omega\neq 0$ e il discriminante $\Delta$ dell'equazione caratteristica $r^2+ar+b=0$ dell'equazione diff. omogenea associata è $\geq 0$, oppure è $<0$ ma $\omega\neq\pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ le soluzioni particolari vanno cercate tra quelle della forma
$$\bar{y}(t)=e^{\lambda t}(c_1\cos\omega t+c_2\cos\omega t)$$
sostituendo, come fatto nella discussione, e risolvendo il sistema.
3. se $\omega\neq 0$, $\Delta<0$ e $\omega=\pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ usare il metodo di variazione delle costanti.

Esempio del caso 3.

Risolvere: $\boxed{y''+y=\cos t.}$ $(*)$

Eq. caratteristica della omogenea associata $r^2+1=0 \Rightarrow r=\pm\sqrt{-1}$ ; $\Delta=-4$ e $\omega=1=\frac{\sqrt{-(-4)}}{2}$.

Quindi la soluzione dell'omogenea associata: $z''+z$ è
$$z(t)=k_1e^{0t}\cos t+k_2e^{0t}\sin t=k_1\cos t+k_2\sin t.$$

È chiaro che se scegliessi come soluzione particolare dell'equazione completa
$$\bar{y}(t)=e^{0t}(c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t)=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t$$
andrei incontro ad una contraddizione (quella scritta è una soluzione dell'omogenea e quindi sostituendo lei e le sue derivate nell'equazione differenziale si ottiene identicamente "0" e non "$\cos t$").

Allora cerco una sol. del tipo:
$$\bar{y}(t)=c_1(t)\cos t+c_2(t)\sin t$$
Nel seguito scriviamo $c_1$ e $c_2$ ma pensiamo a funzioni "non costanti" di $t$.
$$\bar{y}'(t)=(c_1'+c_2)\cos t+(-c_1+c_2')\sin t$$
$$\bar{y}''(t)=(c_1''+2c_2'-c_1)\cos t+(c_2''-2c_1'-c_2)\sin t$$
Sostituisco nell'equazione $(*)$:
$$(c_1''+2c_2'-c_1+c_1)\cos t+(c_2''-2c_1'-c_2+c_2)\operatorname{sen} t=\cos t \quad \forall t\in\mathbb{R}$$
Cioè
$$\begin{cases} c_1''+2c_2'=1\\ c_2''-2c_1'=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'=\frac{1}{2}c_2''\\ \boxed{\frac{1}{2}c_2'''+2c_2'=1}\end{cases}$$
Osserviamo l'equazione nel riquadro: posto $c_2'=c_3$ si trasforma nell'equazione differenziale di 2° ordine
$$c_3''+4c_3=2$$
che ha soluzione $c_3(t)=\lambda_1\cos 2t+\lambda_2\operatorname{sen}2t+\frac{1}{2}$.

Quindi $c_2(t)=\int c_3(t)\,dt=\frac{1}{2}\lambda_1\operatorname{sen}2t-\frac{1}{2}\lambda_2\cos 2t+\frac{1}{2}t+\text{costante}$

Inoltre $c_1'(t)=\frac{1}{2}c_2''(t)=\frac{1}{2}c_3'(t)$

Quindi $c_1(t)=\frac{1}{2}c_3(t)+\text{costante}=\frac{1}{2}\lambda_1\cos 2t+\frac{1}{2}\lambda_2\operatorname{sen}2t+\text{costante}$

Si può quindi scegliere $\lambda_1=\lambda_2=0$, costanti sempre $=0$ e quindi $c_1(t)=0$, $c_2(t)=\frac{1}{2}t$. Allora l'integrale generale è $\boxed{y(t)=\frac{1}{2}t\sin t+k_1\cos t+k_2\sin t}$

Generalizzazione dell'esempio valida solo se $a=0$, $\lambda=0$ e quindi nelle ipotesi $b=\omega^2$.

Cerchiamo le soluzioni particolari di

$$\boxed{y'' + \omega^2 y = A\cos\omega t}$$

tra quelle della forma $\bar{y}(t) = \lambda t \sin\omega t$.

Si ha $\quad \bar{y}'(t) = \lambda \sin\omega t + \lambda\omega t \cos\omega t$

$$\bar{y}''(t) = 2\lambda\omega \cos\omega t - \lambda\omega^2 t \sin\omega t$$

Sostituendo nell'equazione:

$$2\lambda\omega\cos\omega t - \cancel{\lambda\omega^2 t \sin\omega t} + \cancel{\lambda\omega^2 t \sin\omega t} = A\cos\omega t \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

se e solo se

$$2\lambda\omega = 1 \qquad \Rightarrow \lambda = \frac{A}{2\omega}$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$\boxed{y(t) = \frac{A}{2\omega}\, t \sin\omega t + k_1 \cos\omega t + k_2 \sin\omega t.}$$

Analogamente se l'equazione ha la forma

$$\boxed{y'' + \omega^2 y = A\sin\omega t}$$

cerchiamo le soluzioni tra quelle della forma $\bar{y}(t) = \lambda t\cos\omega t$

Allora: $\quad \bar{y}'(t) = \lambda\cos\omega t - \lambda\omega t \sin\omega t$

$$\bar{y}''(t) = -2\lambda\omega \sin\omega t - \lambda\omega^2 t\cos\omega t$$

Sostituendo nell'equazione:

$$-2\lambda\omega\sin\omega t - \lambda\omega^2 t\cos\omega t + \lambda\omega^2 t\cos\omega t = A\sin\omega t \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

se e solo se $\quad \lambda = -A/2\omega$

Quindi l'integrale generale ha la forma

$$\boxed{y(t) = -\frac{A}{2\omega}\, t\cos\omega t + k_1\cos\omega t + k_2 \sin\omega t}$$