ESERCIZIO a RICHIESTA

$y'' + y' - 2y = x$

eq. diff. lin. 2° ordine completa a coeff. cost.

→ OMOG. ASS. : $z'' + z' - 2z = 0$ ⟶ eq. caratteristica

$r^2 + r - 2 = 0 \quad r_{1,2} = 1, -2$

$\Rightarrow z(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$

→ PARTICOLARE

$f(x) = x$ è un polinomio di 1° grado

$b = -2$ il coeff di y è $\neq 0$

$\Rightarrow$ cerco la sol. part. tra i polinomi di primo grado:

$\bar{y}(x) = ax + b \quad$ con $a \neq 0$

$\bar{y}'(x) = a \;, \quad \bar{y}'' = 0$

$a - 2(ax + b) = x$

$(a - 2b) + (-2a - 1)x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = -1/2 \end{cases} \Rightarrow b = -1/4$

$\Rightarrow \bar{y}(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

$y(x) = \bar{y}(x) + z(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$

Moto oscillatorio smorzato.

$m x'' = -kx - bx' \qquad m, b, k \in \mathbb{R}, > 0$

$x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$ eq. diff lin. del 2° ord. OMOGENEA.

Eq caratteristica $r^2 + \frac{b}{m}r + \frac{k}{m} = 0$

$\boxed{\Delta = \frac{b^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} < 0}$

$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ frequenza propria del sistema

$\frac{k}{m} = \omega_0^2$

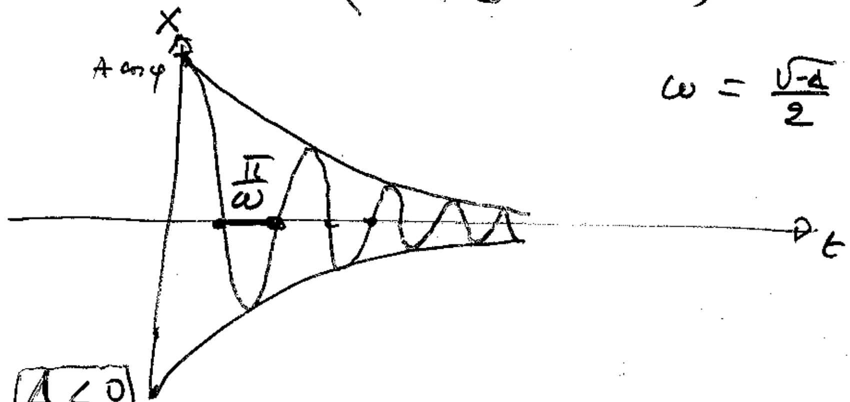
$\Leftrightarrow b^2 < 4\omega_0^2 m^2$

$\Leftrightarrow \boxed{b < 2\omega_0 m}$

$\Rightarrow$ le soluzioni

$c_1 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t + c_2 e^{-\frac{b}{2m}t} \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t =$

$= A e^{-\frac{b}{2m}t} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t + \varphi \right) \right)$



$\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$

$\boxed{\Delta < 0}$

$\Delta = 0 \qquad b = 2\omega_0 m \quad ; \quad r_{1,2} = \frac{b}{2m} = \omega_0$

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2m}t} + c_2\, t\, e^{-\frac{b}{2m}t} = \boxed{(c_1 + c_2 t)\, e^{-\frac{b}{2m}t}}$$

Cond. INIZIALI $\quad x(0) = A \Rightarrow c_1 = A$

$\quad x'(0) = 0$

$\Downarrow$

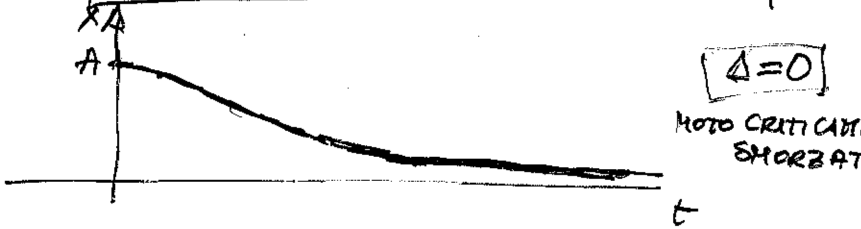
$$x'(t) = (c_1 + c_2 t)\left(-\frac{b}{2m}\right) e^{-\frac{b}{2m}t} + c_2 e^{-\frac{b}{2m}t}$$

$$= \left(c_2 - \frac{b}{2m}c_1 - \frac{b c_2}{2m}t\right) e^{-\frac{b}{2m}t}$$

$$x'(0) = c_2 - \frac{b}{2m}c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{b}{2m}c_1$$

$$\Rightarrow c_2 = A\omega_0$$

$$\boxed{x(t) = A(1 + \omega_0 t)\, e^{-\omega_0 t}}$$



$\boxed{\Delta = 0}$

MOTO CRITICAMENTE SMORZATO

$\Delta > 0$ Per esercizio: trovare le sol. del probl. di Cauchy $x(0) = A \quad x'(0) = 0$ relativo a ps caso

2) Se $b^2 = 4km = 4\omega_0^2 m^2$ si ha $\Delta = 0$ e quindi la soluzione dell'equazione diventa

$$x(t) = (c_1 t + c_2)\, e^{-\frac{b}{2m}t} = (c_1 t + c_2)\, e^{-\omega_0 t}$$

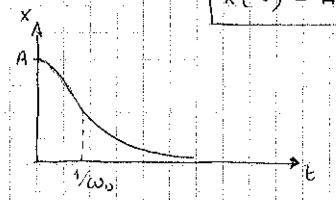
Il sistema non oscilla più. Si parla di <u>moto criticamente smorzato</u>.

Tenuto conto che

$$x'(t) = (c_1 - c_1\omega_0 t - c_2\omega_0)\, e^{-\omega_0 t},$$

se si parte da condizioni iniziali $x(0) = A$, $x'(0) = 0$ si trova $c_2 = A$ e $c_1 - A\omega_0 = 0$ e quindi l'equazione del moto è

$$\boxed{x(t) = A(\omega_0 t + 1)\, e^{-\omega_0 t}}$$



N.B. $\quad x'(t) = -A\omega_0^2\, t\, e^{-\omega_0 t}$

$\quad x''(t) = A\omega_0^2(\omega_0 t - 1)\, e^{-\omega_0 t}$

3) Se $b^2 > 4km$ si ha $\Delta > 0$ e quindi la soluzione dell'eq. diff. è

$$x(t) = c_1 e^{\left(-\frac{b}{2m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{b}{2m} - \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

<u>Sistema sovrasmorzato</u>: torna alla posizione di equilibrio.

Riscrivo più brevemente $x(t) = c_1 e^{(\alpha+\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-\beta)t}$

ove $\alpha = \frac{-b}{2m}$ e $\beta = \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$ $\quad (\alpha < 0, \beta > 0)$

Allora $x'(t) = c_1(\alpha+\beta)\, e^{(\alpha+\beta)t} + c_2(\alpha-\beta)\, e^{(\alpha-\beta)t}$

Chiedere che valgano le condizioni iniziali

$$x(0) = A \quad x'(0) = 0 \quad , \text{ con } A > 0$$

implica

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = A \\ c_1(\alpha+\beta) + c_2(\alpha-\beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = (\beta-\alpha)h,\ c_2 = (\alpha+\beta)h \quad 2\beta h = A$$

$$\Rightarrow c_1 = A \cdot \frac{\beta-\alpha}{2\beta} \qquad c_2 = A \cdot \frac{\alpha+\beta}{2\beta}$$

In particolare $x'(t) = \frac{A}{2\beta}\left[(\beta^2-\alpha^2)\, e^{\beta t} + (\alpha^2-\beta^2)\, e^{-\beta t}\right] e^{\alpha t} > 0 \iff$

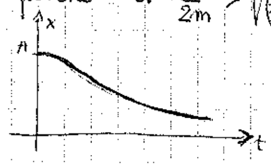
$\iff (\alpha^2-\beta^2)\, e^{-\beta t} > (\alpha^2-\beta^2)\, e^{\beta t} \iff e^{-\beta t} > e^{\beta t}$, poiché

$\alpha^2 - \beta^2 = \left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2 + \omega_0^2 > 0$; quindi per $t > 0$ la derivata prima

è sempre negativa. L'andamento di $\boxed{x(t) = \frac{A}{2\beta}\left[(\beta-\alpha)e^{\beta t} + (\alpha+\beta)e^{-\beta t}\right]e^{\alpha t}}$

per $t > 0$ è decrescente e $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{A}{2\beta}(\beta-\alpha)\, e^{(\alpha+\beta)t} = 0$

poiché $-\alpha = \frac{b}{2m} > \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} = \beta$ e quindi $\alpha + \beta < 0$.



Le leggi di moto nel caso 2 e 3 sono diverse, ma - per $t>0$ - l'effetto è analogo.

Oscillazioni forzate

$$mx'' = F_0 \operatorname{sen}\omega t - bx' - Kx \qquad \omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

$$x'' + \frac{b}{m}x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\operatorname{sen}\underline{\omega} t$$

Problema: trovare una solut particolare

$$x(t) = \alpha \cos\underline{\omega} t + \beta \operatorname{sen}\underline{\omega} t \qquad \alpha, \beta \text{ incognite}$$

$$x'(t) = -\alpha\omega \operatorname{sen}\omega t + \beta\omega\cos\omega t$$

$$x''(t) = -\alpha\omega^2\cos\omega t - \beta\omega^2 \operatorname{sen}\omega t$$

Sostituisco nell'eq. diff. completa

$$\begin{aligned}&-\alpha\omega^2\cos\omega t - \beta\omega^2\operatorname{sen}\omega t +\\ &+\beta\omega\frac{b}{m}\cos\omega t - \alpha\omega\frac{b}{m}\operatorname{sen}\omega t +\\ &+\alpha\omega_0^2\cos\omega t + \beta\omega_0^2\operatorname{sen}\omega t =\\ &= \frac{F_0}{m}\operatorname{sen}\omega t \quad \forall t\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} -\alpha\omega^2 + \beta\omega\frac{b}{m} + \alpha\omega_0^2 = 0 \\ +\beta(\omega_0^2 - \omega^2) - \alpha\omega\frac{b}{m} = \frac{F_0}{m}\end{cases}$$

sistema in α e β:

$$\begin{cases}\alpha(\omega_0^2-\omega^2) + \beta\left(\frac{b\omega}{m}\right) = 0 \\ \alpha\left(-\frac{b\omega}{m}\right) + \beta(\omega_0^2-\omega^2) = \frac{F_0}{m}\end{cases}$$

Ora:

$$\begin{vmatrix}\omega_0^2-\omega^2 & \frac{b\omega}{m} \\ -\frac{b\omega}{m} & \omega_0^2-\omega^2\end{vmatrix} =$$

$$= (\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2 \neq 0 \iff$$

per ipotesi: $\omega > 0$

$$\iff \omega \neq \omega_0 \text{ e } \frac{b\omega}{m} \neq 0$$

e la sol. del sistema (*)

$$\begin{cases}\alpha = \dfrac{-F_0 b\omega_0}{(k-m\omega^2)^2 + (b\omega)^2} \\[2ex] \beta = \dfrac{F_0(k-m\omega^2)}{(k-m\omega^2)^2+(b\omega)^2}\end{cases}$$

esiste se il determinante è diverso da 0

(*) ricordare che $k - m\omega^2 = m\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right) = m(\omega_0^2-\omega^2)$

Se invece $b=0$ e $\omega=\omega_0$ la soluzione si calcola come visto la volta scorsa con il metodo di variazioni delle costanti ed è del tipo

$$x(t) = \frac{-F_0}{2\omega_0} t \operatorname{sen}\omega_0 t$$

($\rightarrow$ il sistema va in risonanza e il moto si amplifica)

Numeri Complessi

$x^2+1=0$?

"Aggiungiamo" ai numeri reali un SIMBOLO: i

All'incirca: polinomi nell'indeterminata i:

$$z = \sqrt{2} + 2i - 7i^2 + \frac{1}{\pi} i^3 \quad \dots$$

Ma poniamo

$$\boxed{i^2 = -1}$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = 1$$

$$z = \sqrt{2} + 2i + 7 - \frac{1}{\pi} i = (\sqrt{2}+7) + \left(2-\frac{1}{\pi}\right) i$$

$\mathbb{C}$: insieme delle scritture $\boxed{a+ib}$ con $a,b \in \mathbb{R}$

- due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno uguale parte reale a e uguale parte immaginaria b
- $(a+ib)+(c+id) = (a+c) + i(b+d) \in \mathbb{C}$
- $(a+ib)\cdot(c+id) = ac + ibc + a\cdot id + ib\cdot id =$
  $= ac - bd + i(bc+ad)$

PROPRIETA': le solite algebriche.

zero: $0+0i = 0$ (parte reale = parte imm = 0)

unità: $1+0i = 1$

$-(a+ib) = -a-ib$

$$(a+ib)^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

$$(a+ib)(1+0i) = (a\cdot 1 - b\cdot 0) + i(b\cdot 1 + a0) = a+ib$$

$$(a+ib)+(-a-ib) = (a-a) + i(b-b) = 0+0i$$

$$(a+ib)(a-ib) = (a^2+b^2) + i(-ab-ab) = a^2+b^2 \neq 0$$

$$(a+ib)\cdot\frac{a-ib}{a^2+b^2} = 1$$

$$(a_1+i\cdot 0)(a_2+i\cdot 0) = a_1a_2 + 0^2 + i(0a_2+a_1 0)$$
$$= a_1 a_2$$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$!

ATTENZIONE

se $\boxed{i > 0}$ $\Rightarrow -1 = i^2 > 0$

$-1\cdot i = \boxed{-i > 0}$

contraddizione

Non c'è ordinamento compatibile con le operazioni

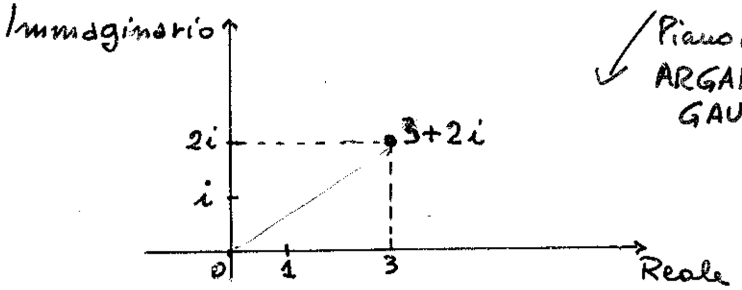
$\mathbb{C}$ è un campo che "contiene $\mathbb{R}$": $\{a+i0\}$

Identifichiamo $\underline{a}$ con $\underline{a+i0}$ (le operazioni definite su $\mathbb{C}$ ristrette al s.i. dei complessi reali si comportano come quelle su $\mathbb{R}$)

Questa è la FORMA ALGEBRICA dei numeri complessi.

Corrispondentemente: FORMA CARTESIANA

$$a+ib \longleftrightarrow (a,b)$$



Piano di ARGAND-GAUSS

Somma ? corrisponde a fare somma di vettori

Zero ? è l'origine del sistema di riferimento

Prodotto ??? $\longrightarrow$ serve passare a coordinate polari

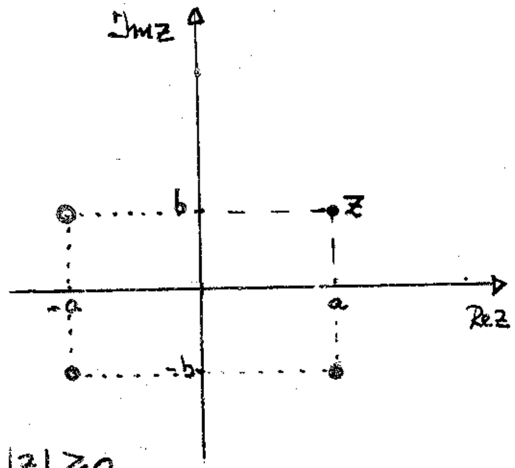
Parte reale di $z=a+ib$: $\mathrm{Re}\, z = a$

Parte immaginaria di z : $\mathrm{Im}\, z = b$

Coniugato di z : $\bar{z} = a-ib = \mathrm{Re}\, z - i\, \mathrm{Im}\, z$: simmetrico di z rispetto all'asse reale

Modulo di z : $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Proprietà: $z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$ $\qquad z-\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$



$$\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$\overline{(\mathrm{Re}\, z)} = \mathrm{Re}\, z$$

$$\overline{i(\mathrm{Im}\, z)} = -(\mathrm{Im}\, z)i$$

$|z| \geq 0$

$|\bar{z}| = |z|$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ $\qquad$ 1ª proprietà triangolare

$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|$ $\qquad$ 2ª proprietà triangolare

Trovare la forma algebrica di $z = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

Quindi $\mathrm{Re}\, z =$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\, z =$ $\qquad$ VEDERE PAG SUCC.

$\bar{z} =$ $\qquad$ $|z| =$

Svolgimento

$$z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1-i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-\sqrt{3}+i(-\sqrt{3}-1)}{1\underbrace{-i^2}_{1}} =$$

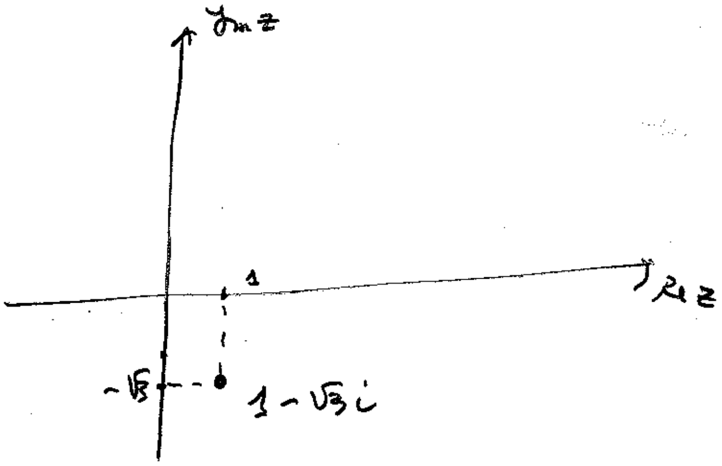
$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\, i$$

$Re\,(1-i\sqrt{3}) = 1$ $\qquad\qquad$ $Im\,(1-i\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$

$$|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\overline{(1-i\sqrt{3})} = 1+i\sqrt{3}$$



Rappresentazione nel piano di A.-G.

$$\left|\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right| = \frac{|1-i\sqrt{3}|}{|1+i|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$