Ex 10

Calcolare su $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ una soluz. di ciascuno dei 2 problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2} \\ y_1(0) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2} \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

Riconoscimento: eq. diff. del 1° ordine a variabili separabili

$$\boxed{\sqrt{1-y^2} = b(y)\cdot a(t) \quad \text{ove} \quad \begin{array}{l} b(y) = \sqrt{1-y^2} \\ a(t) = 1 \end{array}}$$

$a(t)$ è def. e continua su $I = \mathbb{R}$

$b(y)$ " " su $J = [-1,1]$

$I \times J$

Esistono sol. particolari costanti?

$\iff \sqrt{1-y^2} = 0 \iff 1-y^2 = 0 \iff \begin{array}{l} y(t) = 1 \\ y(t) = -1 \end{array}$

$(0,-1) \in I \times J$: esiste una sola soluz del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2} \\ y_1(0) = -1 \end{cases}$

cioè $y(t) = -1$

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2} \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

separiamo le variabili

$$\int \frac{y'\,dt}{\sqrt{1-y^2}} = \int 1\cdot dt \qquad y'dt = dy$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \boxed{\arcsin y + c = t}$$

$t \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\arcsin 0 + c = 0$

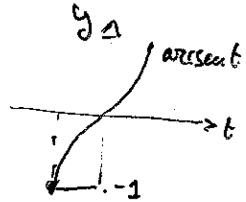
$c = 0$

soluzione del probl. di Cauchy in forma IMPLICITA

$$\boxed{\arcsin y = t} \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

in forma esplicita?

$$\begin{cases} y_2 = \sin t \\ t \in \left(-\pi/2, \pi/2\right) \end{cases}$$



Nota che questa funzione non è derivabile in $\pm\pi/2$ ($\Rightarrow$ estremi esclusi)

Per $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$ passa più di una soluzione?

No. Se $y_3\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$: soluzione è data dalla funz. costante $y_3(t) = -1$

Ex 15

$$\begin{cases} y'' + 9y = \operatorname{sen} 3x \quad (*) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1/6 \end{cases}$$

ED.L. 2° ord. coeff. cost. completa

1°) $z'' + 9z = 0$ $\xrightarrow{\text{eq. caratteristica}}$ $r^2 + 9 = 0$

$r_{1,2} = \pm 3i$

$z(t) = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$ $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

è la soluz. dell'omog. associata.

2°) ricerca di una sol. particolare.

$f(x) = \operatorname{sen} 3x$

la soluz. $a \cos 3x + b \operatorname{sen} 3x$ .. con a, b costanti

non va bene.

Scelgo una soluzione (LA + COMODA POSSIBILE)

$\bar{y}(t) = a(x) \cos 3x + b(x) \operatorname{sen} 3x$ che sostituita

in (*) mi dà identità rispetto x

$\bar{y}' = a' \cos 3x - 3a \operatorname{sen} 3x + b' \operatorname{sen} 3x + 3b \cos 3x =$

$= (a' + 3b) \cos 3x + (b' - 3a) \operatorname{sen} 3x$

$\bar{y}'' = (a'' + 3b' + 3b' - 9a) . \cos 3x +$

$(b'' - 3a' - 3a' - 9b) \operatorname{sen} 3x$

$\bar{y}'' + 9\bar{y} = \operatorname{sen} 3x$

$(a'' + 6b' - \cancel{9a} + \cancel{9a}) \cos 3x + (b'' - 6a' - \cancel{9b} + \cancel{9b}) \operatorname{sen} 3x =$

$= \operatorname{sen} 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$(\blacktriangle) \begin{cases} a'' + 6b' = 0 \\ b'' - 6a' = 1 \end{cases}$$

$b' = -\frac{1}{6} a'' \Rightarrow b'' = -\frac{1}{6} a'''$

$-\frac{1}{6} a''' - 6a' = 1$ $\quad$ sostituisco: $a'(x) = k(x)$

$\frac{1}{6} k'' + 6k = -1$

$\boxed{\text{EDL 2° ordine coeff cost. termine noto polinomio}}$

$k = -\frac{1}{6}$ $\quad k' = 0$ $\quad k'' = 0$

$\Rightarrow$ l'eq. è soddisfatta $\Rightarrow k(x) = -\frac{1}{6}$

è una soluzione particolare di

$\frac{1}{6} k'' + 6k = -1$

$a'(x) = -\frac{1}{6} \Rightarrow a(x) = -\frac{1}{6} x + c$

visto che cerco una sol. particolare

fisso $c = 0$:

$a(x) = -\frac{1}{6} x$

Torno al sistema $(\blacktriangle)$

$$\begin{cases} 0 + 6b' = 0 & b' = 0 \Rightarrow b(x) = \text{costante} \\ b'' + 1 = 1 & b'' = 0 \end{cases}$$

la più semplice possibile è ZERO

una sol. part. dell'eq. data è

$-\frac{1}{6} x \cos 3x$

$y'' + k^2 y = \operatorname{sen} kx$ Caso generale

vedi appunti di martedì 12/1/11

Perveniamo alla sol. del probl. di Cauchy:

Integrale generale è

$$\begin{cases} y(x) = -\frac{1}{6} x \cos 3x + c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1/6 \end{cases}$$

$$y'(x) = -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2} x \operatorname{sen} 3x - 3c_1 \operatorname{sen} 3x + 3c_2 \cos 3x$$

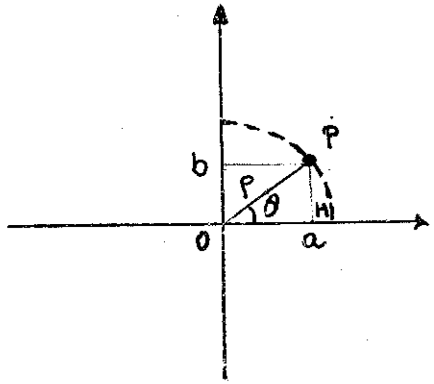
$$y'(0) = -\frac{1}{6} + 0 - 0 + 3c_2 = -\frac{1}{6} \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y(0) = 0 + c_1 + 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

La sol. del probl. di Cauchy è

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{6} x \cos 3x}$$

COORDINATE POLARI



$a = \rho \cos\theta$

$b = \rho \operatorname{sen}\theta$

$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$

$\theta = ??$ individuato "modulo 2π"

Argomento di z

Argomento principale di z: $-\pi < \theta \le \pi$

COMMENTI nella 1ª facciata della pag. succ

$z = a + ib = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$: FORMA TRIGONOMETRI

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2))$

commenti nella 2° facciata della pag succ.

$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta))$

commenti nella 2ª PAGINA successiva a questa

GRAFICAMENTE ?

Trovare argomento principale e modulo di:

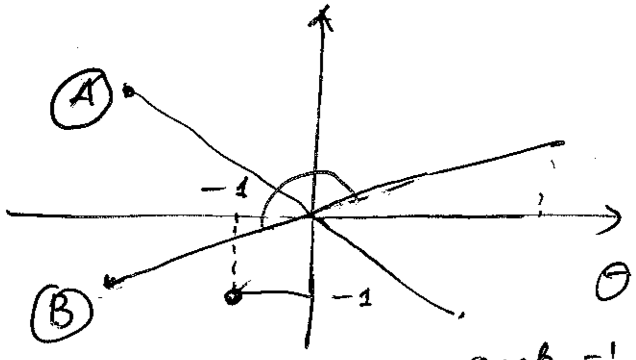
10, $3i$, $1+i$, $\sqrt{3}+i$, $1-\sqrt{3}i$

Svolgimento nella 2ª e 3ª PAGINA successive a questa

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{b/\rho}{a/\rho} = \frac{b}{a}$$

Modo alternativo per trovare l'argomento di un numero complesso

$\Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$: Vero o falso?



FALSO!

Infatti:

$\theta = -\frac{3\pi}{4}$ MA

$\operatorname{arctg}\frac{-1}{-1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

Come si aggiusta?

(A) se $\operatorname{arctg}\frac{b}{a} < 0$ ma (a,b) sta nel secondo quadrante

bisogna prendere $\theta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi$

(B) se $\operatorname{arctg}\frac{b}{a} > 0$ ma (a,b) sta nel III quadrante

bisogna prendere $\theta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \pi$

$$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$$

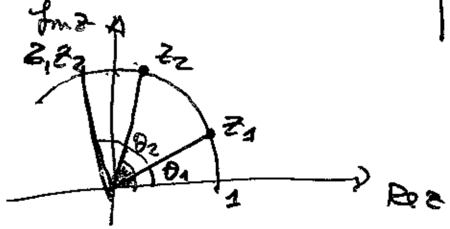
$$z_1 z_2 = \underbrace{\boxed{\rho_1\rho_2}}_{|z_1 z_2|} (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$$

$$= \rho_1\rho_2 \big((\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)\big) =$$

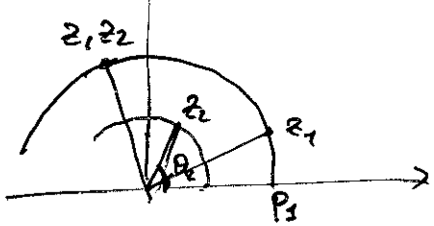
$$= \rho_1\rho_2 \big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\big)$$

Significato geometrico del prodotto di numeri complessi

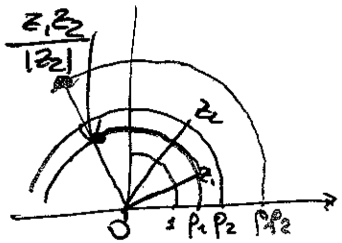
Sia $\rho_1 = 1 = \rho_2$



$\rho_2 = 1$



$\rho_1 \neq 1 \quad \rho_2 \neq 1$



applichiamo 1 rotazione intorno a O di θ_2 e una dilatazione di ρ_2 di z_1

reciproco di

$$z = \rho\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \quad ?$$

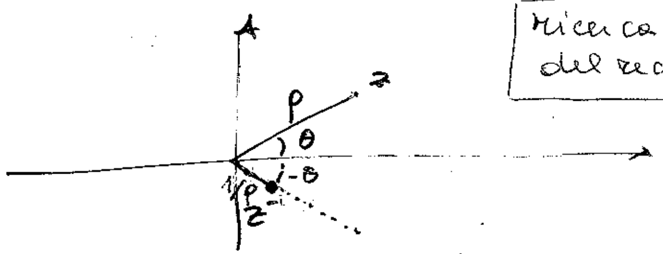
$$z^* = \rho^*\,(\cos\theta^* + i\,\mathrm{sen}\,\theta^*)$$

$$z z^* = 1\,(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0)$$

$$\rho\rho^*\,(\cos(\theta+\theta^*) + i\,\mathrm{sen}(\theta+\theta^*))$$

$$\rho^* = \frac{1}{\rho} \qquad \theta^* = -\theta$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}\,(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))$$

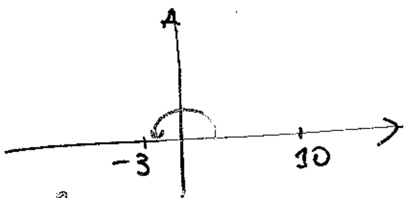


ricerca geometrica del reciproco

ESEMPI di calcolo di modulo e argomento:

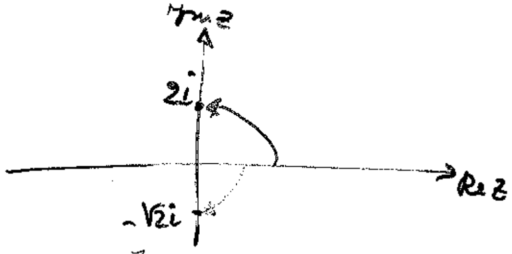
$z = 10$ $\qquad |z| = 10$

$\arg z = 0$



$z = -3$ $\qquad \arg(-3) = \pi$

$|-3| = 3$



$z = 2i$

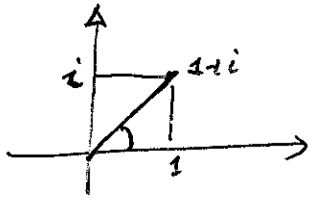
$\arg 2i = \pi/2$

$|2i| = 2$

$z = -\sqrt{2}\,i$

$\arg(-\sqrt{2}\,i) = -\pi/2 \qquad |-\sqrt{2}\,i| = \sqrt{2}$

$z = 1+i$

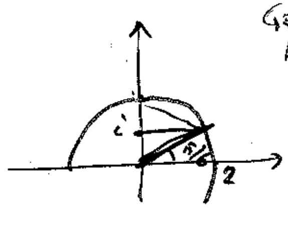


$\arg(1+i) = \pi/4$

$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$z = \sqrt{3} + i \qquad |z| = \sqrt{3+1} = 2$

GRAFICAMENTE



$\arg z = \frac{\pi}{6}$

oppure

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$z = 1 - \sqrt{3}\,i \qquad |z| = 2$

$\mathrm{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$