ESERCIZIO

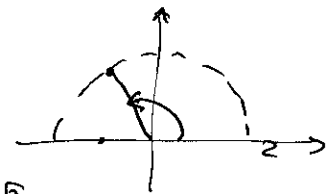
Senza trovare la forma algebrica trovare modulo e argomento di

$$z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{i-1}$$

Sol.: $\left|\frac{-1+\sqrt{3}i}{i-1}\right| = \frac{|-1+\sqrt{3}i|}{|i-1|} = \frac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

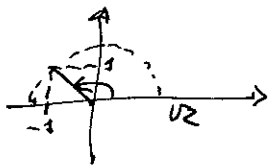
$$\arg\frac{-1+\sqrt{3}i}{i-1} = \arg(-1+\sqrt{3}i) + \arg(i-1)^{-1} =$$

$\arg(-1+\sqrt{3}i) = \frac{2\pi}{3}$



ho cercato θ in modo che $\cos\theta = -1/2$ $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2$

$\arg(i-1) = \frac{3}{4}\pi$



$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \arg(i-1)^{-1} = -\arg(i-1) = -\frac{3}{4}\pi$

$\arg z = \frac{2\pi}{3} + \left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\pi}{12}$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$

Anche senza trovare la forma algebrica di z

in forma algebrica

$$z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{i-1} = \frac{\overbrace{(-1+\sqrt{3}i)(-1-i)}^{(1-\sqrt{3}i)(1+i)}}{\underbrace{(i-1)(-1-i)}_{(1-i)(1+i)}} = \frac{1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})}{1+1}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

Verifica:

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\frac{1+3}{4} + \sqrt{3} + \frac{1+3}{4} - \sqrt{3} = 2 \quad \text{Sì!}$$

DI QUI IN POI: COMMENTI alla 1a facciata PAG SUCCESSIVA

$$z^3 = z^2 \cdot z = \rho^2 \cdot \rho\left(\cos(2\theta+\theta) + i\operatorname{sen}(2\theta+\theta)\right)$$

$$= \rho^3(\cos 3\theta + i\operatorname{sen} 3\theta)$$

$\boxed{\rho e^{i\theta}}$

comportamento additivo della potenza: suggerisce una rappresentazione esponenziale del numero complesso $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$(\sqrt{3}+i)^{200}$?

rappresento il numero in forma trigonom.:

$|\sqrt{3}+i| = 2$ $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$ $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$$\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)\right]^{200} = 2^{200}\left(\cos\frac{200\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{200\pi}{6}\right)$$

$$= 2^{200}\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{-2\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^{200}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$\frac{100}{3} = 33 + \frac{1}{3} = 32 + 1 + \frac{1}{3}$

$z^2 = \rho^2 (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$ (Vedi pag precedente)

$\vdots$

$z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$

ES. $(\sqrt{3}+i)^3 = 2^3 \left(\cos 3 \cdot \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} 3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 8i$

VERO?

$=$

Viceversa.

Sia $w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Esistono esattamente n radici n-esime complesse: $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ di w.

Se $w = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$

e $z_k = \rho_k (\cos\theta_k + i \operatorname{sen}\theta_k)$ — ρ_k, θ_k incognite. se $z_k^n = w$ allora ...

si ha : $\rho_k = r^{1/n}$ $\quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$

$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ $\quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$

Sono tutte distinte

NON ce ne sono altre.

Esempi:

radice cubica di 1: VEDI PAG SUCCESSIVA.

rappresentazione grafica:

$r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) = \rho_k^n (\cos n\theta_k + i \operatorname{sen} n\theta_k)$

ciò succede se e solo se

$$\begin{cases} r = \rho_k^n & r \in (0, +\infty) \\ n\theta_k - \varphi = 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_k = \sqrt[n]{r} \\ \frac{n\theta_k}{n} = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

$$\theta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

quante sono le coppie distinte $(\cos\theta_k, \operatorname{sen}\theta_k)$?

sono quante le frazioni $\frac{k}{n}$ con $0 \leq \frac{k}{n} < 1$?

$$\underbrace{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \frac{n-1}{n}}_{\text{sono } n}$$

Quindi le soluzioni di $z^n = w$ sono della forma

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

con k variabile in $\{0, 1, \dots, n-1\}$

oppure variabile in $\underbrace{\{-h, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-h-1\}}_{n}$

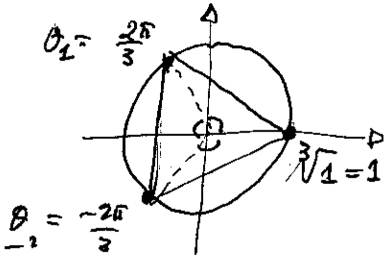
radice cubica di 1 : $z_k^3 = 1$

$|1| = 1$

$\arg 1 = 0$

$$\Rightarrow z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{0}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{0}{3}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \qquad k = -1, 0, 1$$



In generale le radici n-esime di un numero complesso stanno tutte su una circonferenza con centro in $(0,0)$ e raggio $\sqrt[n]{r}$ (se $w = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$) e sono vertici di un n-agono regolare

Esempio 1

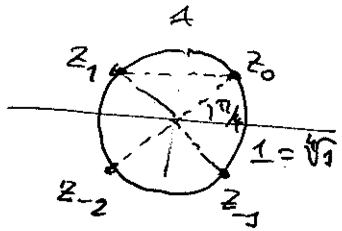
Radice quarte di -1

$|-1| = 1$

$\arg(-1) = \pi$

$k = -2, -1, 0, 1$

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)$$



$z_0 = \frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}$

$z_{-2} = -z_0 = -\frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}$

$z_{-1} = \frac{\sqrt2}{2} - i\frac{\sqrt2}{2} = -z_1 \Rightarrow$

$z_1 = -\sqrt2/2 + i\sqrt2/2$

ES2. $w = \sqrt3\, i - 1$ Radici quarte?

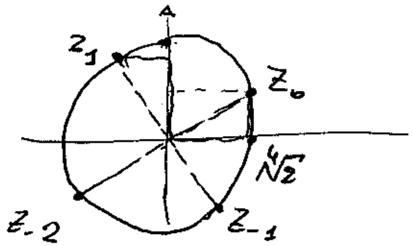
$|w| = \sqrt{1+3} = 2$

$\arg w = \theta$: $\cos\theta = \frac{-1}{2}$ $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\sqrt3}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

le radici quarte hanno la forma

$$z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$k = -2, -1, 0, 1$



$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right) =$

$= \sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2} + i\,\sqrt[4]{2}\cdot\frac{1}{2}$

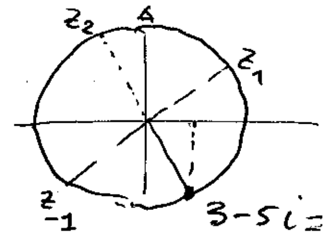
$z_{-2} = -\sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2} - i\,\sqrt[4]{2}\cdot\frac{1}{2}$

$z_1 = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt3}{2}$

$z_{-1} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt3}{2}$

Più in generale, data una radice n-esima di un numero w, le altre si trovano per successive rotazioni di $\frac{2\pi}{n}$, cioè moltiplicando per $\cos\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{n}$ oppure $\cos\frac{-2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{-2\pi}{n}$ un numero opportuno di volte. VEDI ES4.

ES3 Supponete che $z = 3 - 5i$ sia una radice quarta di w. Quanto valgono le altre 3?



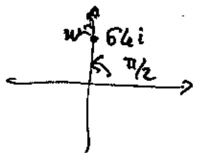
$\sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$z_0 = 3 - 5i \Rightarrow z_2 = -3 + 5i$

$z_1 = 5 + 3i \Rightarrow z_{-1} = -5 - 3i$

ES4. radice sesta di $64i = w$

$|w| = 64$ $\qquad \arg w = \pi/2$



$\Rightarrow \quad |z_k| = \sqrt[6]{64} = 2$

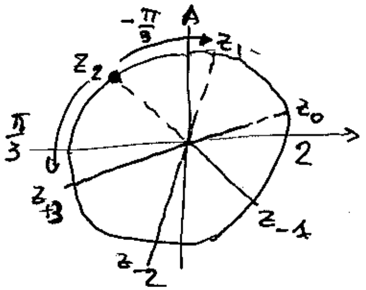
$\arg z_k = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{6} = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$

$k=0$: $\pi/12$

$k=1$ $\quad 5\pi/12$

$k=2$ $\quad 3\pi/4$

angolo di cui si calcola facilmente seno e coseno. Conviene partire di lì!



$z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right) =$

$= 2\left(-\frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}\right) =$

$= -\sqrt2 + i\sqrt2$

$(\Rightarrow z_{-1} = \sqrt2 - i\sqrt2)$

$z_1 = z_2\left(\cos(-\pi/3) + i\,\text{sen}(-\pi/3)\right) =$

$= (-\sqrt2 + i\sqrt2)\left(+\frac12 - i\frac{\sqrt3}{2}\right) = -\frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt6}{2} + i\left(\frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt6}{2}\right)$

$\Rightarrow z_{-2} = \frac{\sqrt2}{2} - \frac{\sqrt6}{2} - i\left(\frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt6}{2}\right)$

$z_3 = z_2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right) =$

$= (-\sqrt2 + i\sqrt2)\left(\frac12 + i\frac{\sqrt3}{2}\right) =$

$= -\frac{\sqrt2}{2} - \frac{\sqrt6}{2} + i\left(\frac{\sqrt2}{2} - \frac{\sqrt6}{2}\right)$

$\Rightarrow z_0 = \frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt6}{2} - i\left(\frac{\sqrt2}{2} - \frac{\sqrt6}{2}\right)$

- TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA:

ogni equazione POLINOMIALE di grado n a coefficienti complessi ammette esattamente n radici complesse.

- Quindi ogni polinomio a coefficienti complessi di grado n si può scrivere come prodotto di n polinomi di 1° grado:

$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$

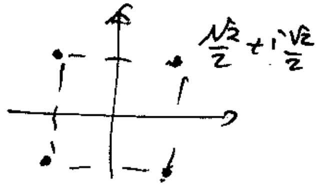
ove $z_1, \dots, z_n$ sono le radici complesse.

- Se $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sono reali, le radici sono reali o complesse coniugate ...!

Es: $z^4 + 1 = 0$ $\qquad$ eq. a coeff complessi reali

$\Downarrow$

ha 4 radici complesse



nei complessi sono

$z^4 + 1 = \left(z - \left(\frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}\right)\right)\left(z - \left(\frac{\sqrt2}{2} - i\frac{\sqrt2}{2}\right)\right)\cdot$

$\cdot\left(z - \left(-\frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}\right)\right)\left(z - \left(-\frac{\sqrt2}{2} - i\frac{\sqrt2}{2}\right)\right)$

$= \left(z^2 - \sqrt2 z + 1\right)\left(z^2 + \sqrt2 z + 1\right)$

pol. di 2° grado a coeff reali

.... Quindi ogni polinomio a coefficienti reali è prodotto di polinomi a coefficienti reali di 1° grado o di 2° grado con $\Delta < 0$.

Il teorema <u>non si applica</u> a equazioni non polinomiali. Ad es. risolvere:

A) $iz^3 = \bar{z}$

B) $|z| = -iz^3$

Tornando alle soluzioni di

$$y'' + ay' + by = 0$$

quando $\Delta = a^2 - 4b < 0$

$$r^2 + ar + b = 0$$

ha soluzioni $r_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{4b-a^2}\cdot i}{2}$

Possiamo risolvere l'eq. diff. come nel caso in cui $\Delta > 0$

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

$$r_1 = \underbrace{\boxed{-\frac{a}{2}}}_{\alpha} + \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}}_{\beta} i = \alpha + \beta i$$

$$r_2 = \boxed{-\frac{a}{2}} - \boxed{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}} i = \alpha - \beta i$$

$$y = e^{\alpha t}\left(c_1 e^{\beta i t} + c_2 e^{-\beta i t}\right)$$

Dobbiamo correlare $e^{\beta i t}$ e $e^{\beta i t}$ con il $\operatorname{sen}\beta t$ e il $\cos\beta t$

se posso rappresentare

$$\begin{cases} \cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t = e^{i\beta t} \\ \cos(-\beta t) + i \operatorname{sen}(-\beta t) = e^{i(-\beta t)} = e^{-i\beta t} \end{cases}$$

posso mostrare che $e^{\alpha t}\cos\beta$ e $e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta$ sono soluzioni. Infatti

le sol. complesse dell' eq. diff.

$$y'' + ay' + by = 0$$

con $\Delta = a^2 - 4b < 0$

e le solu. della eq. caratteristica sono $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

sono $c_1 \boxed{e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t}} + c_2 \boxed{e^{\alpha t} \cdot e^{-i\beta t}}$

Ricavo $\cos\beta t$ e $\operatorname{sen}\beta t$ dalle uguaglianze precedenti:

$$\begin{cases} \cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t = e^{i\beta t} \\ \cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t = e^{-i\beta t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cos\beta t = e^{i\beta t} + e^{-i\beta t} \\ 2i\operatorname{sen}\beta t = e^{i\beta t} - e^{-i\beta t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\beta t = \dfrac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} \\ \operatorname{sen}\beta t = \dfrac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} \end{cases}$$

e quindi

$$e^{\alpha t}\cos\beta t = \frac{1}{2} e^{\alpha t} e^{i\beta t} + \frac{1}{2} e^{\alpha t} e^{-i\beta t}$$

$$e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2i} e^{\alpha t} e^{i\beta t} - \frac{1}{2i} e^{\alpha t} e^{-i\beta t}$$