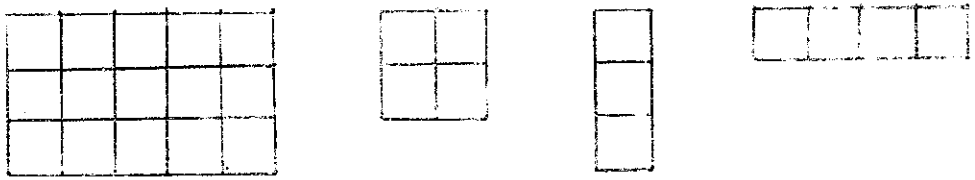
MATRICI



Matrice di tipo (m,n) o a m RIGHE (orizzontali) e n COLONNE (verticali) è un insieme di $\boxed{m \cdot n}$ numeri reali disposti in tabella

MATRICI QUADRATE	(n,n)
VETTORI RIGA	$(1,n)$
VETTORI COLONNA	$(m,1)$

Si scriverà
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

A, B di tipo (m,n) o $m \times n$

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad tA = (t a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Spazio vettoriale delle matrici (m,n)

Il prodotto tra matrici non si fa COMPONENTE PER COMPONENTE bensì RIGHE PER COLONNE

$$(a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}$$

ATTENZIONE: è un prodotto scalare

In generale

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{k1} \ \cdots \ a_{kn}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1h}} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \boxed{b_{nh}} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}}_{n \times p} = \underbrace{\begin{array}{c|c} & \text{colonna } h \\ \hline \text{Riga } k & \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{jh} \end{array}}_{m \times p}$$

elem. di posto (k,h)

Per poter schematizzare la composizione di movimenti del piano o di altre trasformazioni rappresentabili con matrici serve definire il prodotto di matrici dicendo che l'elemento c_{kh} della matrice $C = AB$ è il prodotto scalare del vettore di $\mathbb{R}^n$ che costituisce la k-esima riga di A per il vettore di $\mathbb{R}^n$ che costituisce la h-esima colonna di B $\Rightarrow$ BISOGNA CHE IL NUMERO DI COLONNE DI A SIA UGUALE AL NUMERO DI RIGHE DI B.

L'idea viene illustrata sulle rotazioni alla pag. successiva.

A questo punto posso osservare che ogni matrice
$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$
rappresenta una funzione di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ definita come

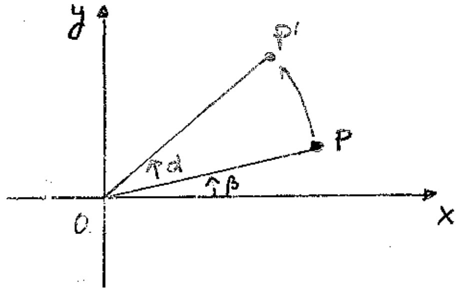
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(a ogni $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ associo 1 e 1 sol $(x_1', \dots, x_m') \in \mathbb{R}^m$)

In particolare moltiplicare due matrici conformabili (*) significa COMPORRE DUE FUNZIONI. E, dato che la composizione di funzioni è operazione associativa, lo è anche il prodotto di matrici conformabili.

(*) due matrici sono conformabili se il numero di colonne della prima (a sinistra) è uguale al numero di righe della seconda

Rotazioni nel piano, aventi centro nello stesso punto (origine del sistema)



$P=(x,y)$ $\begin{cases} x=\rho\cos\beta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\beta \end{cases}$

$P'=(x',y')$ $\begin{cases} x'=\rho\cos(\alpha+\beta) \\ y'=\rho\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta) \end{cases}$

$\begin{cases} x'=(\rho\cos\beta)\cos\alpha-(\rho\,\mathrm{sen}\,\beta)\mathrm{sen}\,\alpha \\ y'=(\rho\,\mathrm{sen}\,\beta)\cos\alpha+(\rho\cos\beta)\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$

$\Rightarrow (0)\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ Riscrivo: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Fare due rotazioni successive (cioè comporre due rotazioni) vuol dire fare il prodotto di 2 matrici di quel tipo

Chiamo A quella relativa alla rotaz. di α
A' " " " " di α' che porta (x',y') in (x'',y''): (*)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{A'A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

com'è la matrice della rotazione di $(-\alpha)$?
E facendo il prodotto con A che cosa succede?

(*) $\begin{cases} x''= x(\cos\alpha\cos\alpha'-\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha')-y(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha'+\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha') \\ y''= x(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha'+\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha')+y(\cos\alpha\cos\alpha'-\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha') \end{cases}$

(avendo sostituito (0) in un sistema come $\begin{cases} x''=x'\cos\alpha'-y'\,\mathrm{sen}\,\alpha' \\ y''=x'\,\mathrm{sen}\,\alpha'+y'\cos\alpha' \end{cases}$)

e si vede che il coeff. di x nella 1ª eq. è $(\cos\alpha, -\mathrm{sen}\,\alpha)\circ(\cos\alpha', \mathrm{sen}\,\alpha')$
e quello nella seconda è $(\mathrm{sen}\,\alpha, \cos\alpha)\circ(\cos\alpha', \mathrm{sen}\,\alpha')$ | prodotti delle 2 RIGHE DI A per la 1ª colonna di A'
ECC.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

posso fare il prodotto AB?

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad -1} \\ 0 \quad 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+(-1)(-1) & 1\cdot 3+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 2+(-1)\cdot 0 \\ 0\cdot 1+1(-1) & 0\cdot 3+1\cdot 0 & 0\cdot 2+1\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il prodotto di una matrice $m\times n$ per una matrice $n\times p$ è una matrice $m\times p$.

Posso fare il prodotto BA?

No perché il numero di colonne di B è 3 mentre il num. di righe di A è 2.

Le matrici devono essere conformabili perchè si possa fare il prodotto.

$A = (1, -1, 0)$

$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$AB = (1,-1,0)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (3-2+0) = (1)$ $\boxed{1\times1}$

$BA = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1,-1,0) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{3\times3}$

Come sono AB e BA? Diverse per ordine!

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Come sono AB e BA? diverse perchè hanno diversi gli elementi di posto (1,2) e (2,1)

Comunque: prodotto associativo e distributivo

$\left.\begin{array}{ll} A \text{ di tipo} & (m,n) \\ B & (n,p) \\ C & (p,q) \end{array}\right| \Rightarrow (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

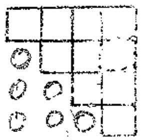
$\left.\begin{array}{ll} A, B \text{ di tipo} & (m,n) \\ C & (n,p) \end{array}\right| \Rightarrow (A+B)\cdot C = AC + BC$

MATR. QUADRATE

Matrice identica $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$: ininfluente nel prodotto

Matrici diagonali (quadrate)

Matrici triangolari (ALTE o BASSE)



Matrici rettangolari ridotte

Matrici trasposte

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ ridotte

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ triangol. alta.

sono il punto di arrivo per [illegible] algoritmi del calcolo delle soluz. di un sist. lineare

A^T (matrice trasposta di $A_{m\times n}$) è una matrice $n\times m$ tale che il suo elemento di posto (i,j) coincide con l'elemento di posto (j,i) della A

$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

3×2

abbiamo scambiato righe con colonne

DETERMINANTE di una matrice QUADRATA

(Se la matrice NON è quadrata, NON c'è determinante)

Connessioni:

- PROBLEMA DELL'INVERTIBILITÀ DELLA MATRICE
- RANGO DI UNA MATRICE (m,n)
- RISOLUBILITÀ DI SISTEMI LINEARI (m,n)
- RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI (m,n)
- INDIPENDENZA DI UN INSIEME DI VETTORI
- CALCOLO AUTOVALORI DI UNA MATRICE QUADR.

Ne diamo una definizione ricorsiva basata su qualche esperienza precedente.
Quando è indipendente l'insieme di

- 1 vettore di $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$: $\underline{u} = (a_{11})$
- 2 vettori di $\mathbb{R}^2$: $\underline{u} = (a_{11}, a_{12})$, $\underline{v} = (a_{21}, a_{22})$
- 3 vettori di $\mathbb{R}^3$: $\underline{u} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$
  $\underline{v} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$
  $\underline{w} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$?

Risposte:

- $\underline{u} \neq \underline{0} \Rightarrow a_{11} \neq 0$
- $\underline{u} \neq t\underline{v}$ e $\underline{v} \neq \underline{0} \Rightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$
- $\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) \neq 0 \Rightarrow$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \neq 0$$

Chiamo determinante delle matrici

$$(a_{11}) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

"il numero che risulta .... determinante per stabilire se i vettori riga che compaiono in queste matrici sono indipendenti". Cioè

DEFINIZIONE. Sia $A = (a_{ij})$ quadrata di ordine n. Il determinante di A è un numero reale così definito

- se $n = 1$: $\det(a_{11}) = a_{11}$
- se $n = 2$: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Più in generale, supposto di aver definito il determinante di matrici di ordine $n-1$,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} + \dots (-1)^{n+1} a_{n1} \dots$$

ove M_{i1} è il determinante della matrice che si ottiene da A togliendo la 1ª colonna e la i-esima riga.

TERMINOLOGIA: M_{i1} MINORE COMPLEMENTARE di a_{i1}

$A_{i1} = (-1)^{i+1} M_{i1}$: COMPLEMENTO ALGEBRICO di a_{i1}

La terminologia si estende a M_{ij}, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Vale il

TEOREMA di LAPLACE. Comunque si scelga $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk} \qquad \text{CALCOLO PER COLONNE}$$

$$= a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots + a_{kn}A_{kn} \qquad \text{CALCOLO PER RIGHE}$$

Es. 1) $\det \begin{pmatrix} 8 & \boxed{2} & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$

COROLLARIO: $\det(A) = \det(A^T)$ (visto che il determinante può essere calcolato sia per righe che per colonne)

2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ i 4 vettori RIGA (e i 4 COLONNA) sono dipendenti

3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) \cdot 4 \cdot 2$: prodotto degli elementi sulla diagonale.

VALIDO per tutte le triangolari (alte o basse)

PROPRIETÀ. (PER COLONNE: rileggerle poi per le RIGHE)

1) Se in A c'è una colonna di zeri: $\det A = 0$

2) Se A' è ottenuta da A scambiando due colonne,
$$\det A' = -\det A$$

Es: $\begin{vmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & -6 & 4 \end{vmatrix} =$

• Conseguenza: se in A 2 colonne sono $=$: $\det A' = \det A = 0$

$\begin{vmatrix} 8 & \boxed{2} & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$ sviluppando secondo la II colonna

$= 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} +$

$+ 0 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} =$

$= -2\,(16 - 30) + 3\,(32 - 6) =$

$= 28 + 78 = 106$

Analogamente, sviluppando lungo l'ultima riga

$= -6 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} +$

$+ 4\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -6\,(-7) + 4\,(16) =$

$= 42 + 64 = 106$