1) Scambiando due righe (o colonne) si ha matrice A' con $\det A' = -\det A$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \det A$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(-A_{11}) + a_{12}(-A_{12}) + a_{13}(-A_{13}) =$$

$$= -\det A$$

(Se le righe o le colonne sono di più si sviluppa secondo quelle comuni e ci si riconduce qui)

Esempio

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & -6 & 4\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & 0 & 4\end{vmatrix}$$

un numero dispari di scambi di colonne (righe) porta a un det. con uguale valore assoluto e segno opposto.

Ma:

$$\begin{vmatrix} -1 & 8 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \\ 4 & -6 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & 0 & 4\end{vmatrix}$$

Un numero pari di scambi ... porta allo STESSO DETERMINANTE

2) Se due righe o 2 colonne della matrice A sono uguali succede che

$$\det A = -\det A = 0$$

3) moltiplicando tutti gli elementi di una colonna di A per $\lambda \in \mathbb{R}$ si ottiene una matrice A' tale che $\det A' = \lambda \det A$.
Stesso discorso per le righe.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

moltiplico la prima colonna per -2

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

Sviluppo il det di A' secondo la prima colonna

$$\det A' = -2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5\end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3\end{vmatrix}$$

$$= -2\left[1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3\end{vmatrix}\right]$$

$$= -2 \det A$$

Conseguenza 1

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|$$

Conseguenza 2

Se A contiene 2 colonne o 2 righe proporzionali (secondo λ) allora $\det A = \lambda \cdot 0 = 0$.

4) A : una riga può essere vista come somma di due righe. Ad es.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{pmatrix} = \dots\dots$$

In generale se A è una matrice $n \times n$ in cui l'ultima riga si può vedere come somma

$$\underline{b} + \underline{c} = (b_{n1}+c_{n1}, \dots, b_{nn}+c_{nn})$$

allora

$$\det A = (b_{n1}+c_{n1}) A_{n1} + \dots + (b_{nn}+c_{nn}) A_{nn}$$

gli A_{nj} sono numeri: applico la prop. distrib.

$$= (b_{n1} A_{n1} + \dots + b_{nn} A_{nn}) + (c_{n1} A_{n1} + \dots + c_{nn} A_{nn}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \boxed{\text{le prime } n-1 \text{ righe di } A} \\ \underline{b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boxed{\text{le prime } n-1 \text{ righe di } A} \\ \underline{c} \end{vmatrix}$$

La cosa si generalizza a una qualunque riga/colonna

ESEMPIO 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \substack{3-(1) \\ 2} & \substack{2-0 \\ 2} & \substack{1-(-1) \\ 2} \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3-3(1) & 2-3 \cdot 0 & 1-3(-1) \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$$

Es. 2

Sommando opportuni multipli della 1a, della 2a e della 3a riga si ottiene

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1-1 & 0-0 & 1-0 & 0-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-1 & 0-1 & 1-0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ESEMPIO 3

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3+4 & 0+6 & 3+8 \end{vmatrix}$$

con ultima riga che è 3 volte la 1ª sommata a 2 volte la 2ª

se vado a considerare la matrice ottenuta da questa sottraendo 3 volte la 1ª riga ho lo stesso determinante. Ma

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Cioè: se 1 riga della matrice è combinazione lineare di altre allora il det. è $=0$.

Cioè se ho $\boxed{n}$ vettori ad $\boxed{n}$ componenti che siano dipendenti allora il det. della matrice $n \times n$ che si ottiene accostandoli (come righe oppure come colonne) è nullo.

Per garantire il viceversa mi serve la nozione di matrice inversa.

3) Moltiplicando per $\lambda \in \mathbb{R}$ una colonna di A si ha una matrice A' con: $\det A' = \lambda \det A$.

- Conseguenza (1): $\det(\lambda A) = \lambda^n |A|$
- Conseguenza (2): se A contiene colonne proporzionali, $\det A = 0$

4) Aggiungendo a una colonna una combinazione lineare delle altre, il determinante non cambia

in particolare se una colonna è comb. lin. delle altre...

ES: Ricalcolare (SOTTRAZIONE DI COLONNE e CALCOLO X RIGHE)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

(VEDI PAGINE PRECEDENTI !!)

5) TEOREMA DI BINET: A, B quadrate di ordine $n \Rightarrow$

$$\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)$$

6) $\det A^T = \det A$

Rileggere PRODOTTO VETTORIALE e MISTO in termini di DETERMINANTI 3x3.

MATRICI INVERSE

B è detta inversa di A se: $AB = BA = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Si denota l'inversa di A con A^{-1} e si dice che A è INVERTIBILE.

Se esiste A^{-1}: $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ ed entrambi sono NON NULLI.

VICEVERSA: (Giustificazione a pag. dopo)

se $\det A \neq 0$ esiste A^{-1} e si calcola come

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

VI7

Es. Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ha determinante $\neq 0$

la sua inversa è $\dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

In particolare $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ che ha

det: $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ ha inversa

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ... come visto geometricamente

Se avete la curiosità di capire "perché" l'inversa è fatta così OSSERVATE:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} & \boxed{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22}} \end{pmatrix}$$

- Le cose RIQUADRATE valgono: $\det A$ (Teor. di Laplace)
  secondo la 1ª riga
  secondo la 2ª riga
- le altre sono nulle perché corrispondono a trovare il determinante di una matrice con una riga ripetuta: talora questo si chiama 2° TEOR. di LAPLACE.
- Lo stesso discorso vale anche se prendo una matrice (n,n), con $n > 2$.

Es. (sul testo errato)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Osservo che $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ha determinante $-2 \neq 0$ e quindi l'inversa esiste

per ogni elemento calcolo il complemento alg. e lo inserisco in una matrice seguendo l'ordine riga/colonna presente in A

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 9 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 9 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9/2 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Siano $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^n$

Proviamo che se n vettori a n componenti sono INDIPENDENTI allora il det. della matrice $n \times n$ formata accostandoli (per colonne (o per righe)) è $\neq 0$

DIM.

gli n vettori indipendenti in $\mathbb{R}^n$ sono una base di $\mathbb{R}^n$, cioè tutti i vettori si possono scrivere come una loro combinazione lineare.

$$(1,0,\dots,0) = b_{11}\underline{a}_1 + b_{21}\underline{a}_2 + \dots + b_{n1}\underline{a}_n$$
$$(0,1,\dots,0) = b_{12}\underline{a}_1 + b_{22}\underline{a}_2 + \dots \; b_{n2}\underline{a}_n$$
$$\vdots$$
$$(0,\dots,0,1) = b_{1n}\underline{a}_1 + b_{2n}\underline{a}_2 + \dots + b_{nn}\underline{a}_n$$

$$(\underline{a}_1|\underline{a}_2|\dots|\underline{a}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ la matrice $A = (\underline{a}_1/\underline{a}_2/\dots/\underline{a}_n)$ è invertibile

$\Rightarrow$ $\det A \neq 0$

Sistemi lineari =

Sistemi di EQUAZIONI algebriche di 1° grado.

Numero di equazioni : m
" " incognite : n
} non è detto che coincidano

Convenzione: al primo membro le incognite
" secondo " i "termini noti"

Raffinamento: le incognite in ogni equazione si susseguono nello stesso ordine

Es: $\begin{cases} 6x - 3y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} 4x - \frac{1}{3}y + z = 0 \\ \sqrt{2}y - z = 0 \end{cases}$

Entrambi sistemi di 2 equazioni in 3 incognite.
Il secondo sarà detto

OMOGENEO

poichè i termini noti sono nulli.

- Tutti i sistemi omogenei hanno almeno 1 soluzione(*): $(x,y,z) = (0,0,0)$
- Ma non è detto che sia l'unica. Nell'esempio: $\begin{cases} x = \frac{1}{4}(\frac{1}{3} - \sqrt{2})t \\ y = t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}$ al variare di t in $\mathbb{R}$ sono tutte soluzioni.

Geometricamente:

E nel primo esempio?

(*) ATTENZIONE: le soluzioni di un sistema in n incognite sono n-uple ordinate soddisfacenti tutte le equazioni del sistema

In un sistema lineare le cose importanti sono:

- i coefficienti delle incognite
- i termini noti.

Le incognite sono dei "SEGNAPOSTO"
così come le equazioni.

Riarrangio gli elementi del sistema in una matrice così:

$$\begin{cases} 6x - 3y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

6	−3	2
2	−1	1

MATRICE DEI COEFFICIENTI del sistema

6	−3	2	4
2	−1	1	2

MATRICE ORLATA con i TERMINI NOTI

In particolare si può rileggere il sistema di equazioni come un'unica equazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

SIMBOLOGIA $A\underline{x} = \underline{b}$

[illegible] incognite

colonna dei termini noti

[illegible] adottato le convenzioni iniziali!

D'altra parte questa rappresentazione rende più evidente perché penso alle soluzioni del sistema come n-uple ordinate.

Per i sistemi (così come per le singole equazioni) possono presentarsi 3 casi

1. non esistono soluzioni. ES. $\begin{cases} 6x - 3y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$
   SISTEMA IMPOSSIBILE

RISOLUBILI

2. esistono soluzioni, ma sono infinite ES. $\begin{cases} 6x - 3y = 4 \\ 2x - y = \frac{4}{3} \end{cases}$
   SISTEMA INDETERMINATO
3. esiste 1 e 1 sola soluzione ES. $\begin{cases} 6x - y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$
   SISTEMA DETERMINATO

Sistemi lineari di n equazioni in n incognite

Matrice dei coefficienti: quadrata. La chiamo A:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Risolvo il sistema "come se" fosse un'equazione del tipo $ax = b$: se $a \neq 0$, $x = a^{-1}b$.

Nel caso delle matrici A^{-1} c'è se $\det A \neq 0$.

Dunque:

se $\det A \neq 0$ il sistema ammette 1 e 1 sola soluzi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

se $\det A = 0$ - può darsi che il sistema sia indeterminato oppure che sia impossibile. VEDI PO

Tornando al caso $\det A \neq 0$ ... concretamente?

Guardo come vanno le cose per $n = 2$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 \end{pmatrix}$$

determinante della matrice che si ottiene da A sostituendo alla 1ª colonna $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

[illegible]

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\det A}$$

Discorso che si generalizza a n qualunque

ES:
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 4x + y + z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

matrice dei coeff. — vettore delle incognite — vettore dei termini noti

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 2(-18+15) = -6$$

il sist. è risol. in maniera unica

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-6(-4)}{-6} = -4$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = -2$$

Attenzione se $\det A = 0$ questo metodo di calcolo delle soluzioni non va bene, MA le soluzioni potrebbero esistere lo stesso.