WORD. (2) 5 [illegible] Esercizio a richiesta

$$y'' - y' - 6y = e^{-2x}$$

eq. diff. lin. 2° ordine, completa a coeff. costanti

omog. associata : $z'' - z' - 6z = 0$

eq. caratteristica: $r^2 - r - 6 = 0 \quad r = -2, 3$

$z(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$ sol. della omog. assoc.

solus. particolare.

$$y(x) = c(x)\, e^{-2x}$$

$$y' = c' e^{-2x} - 2c e^{-2x} = (c' - 2c)\, e^{-2x}$$

$$y'' = (c'' - 4c' + 4c)\, e^{-2x}$$

$$\left(c'' - 4c' + \cancel{4c} - c' + \cancel{2c} - \cancel{6c}\right) e^{-2x} = e^{-2x}$$

$$(c'' - 5c')\, \cancel{e^{-2x}} = \cancel{e^{-2x}}$$

$$(*)\ c'' - 5c' = 1$$

$-5c' = 1 \qquad c' = -1/5 \qquad (\Rightarrow c'' = 0)$ è soddisfatta

$\boxed{c(x) = -\frac{1}{5}x}$ sol particolare di (*)

$y(x) = -\frac{1}{5} x e^{-2x}$ è sol. part. dell'eq. diff. assegnata

$\Rightarrow$ integrale generale : $\boxed{y(x) = -\frac{1}{5} x e^{-2x} + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}}$

V 2.

ES. Risolvere

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 4x + y + z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \qquad \Rightarrow x =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \qquad \Rightarrow y =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \qquad \Rightarrow z =$$

Notare che per sistemi $n \times n$ OMOGENEI:

se $\det A \neq 0$ c'è la sola soluzione $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

se $\det A = 0$ ci sono infinite soluzioni

$\Rightarrow$ MEMORIZZARE PER DISCORSI DI [illegible]

ATTENZIONE. Nulla vieta di risolvere un sistema $n \times n$ (con det. della matrice dei coefficienti $\neq 0$) usando invece di questo METODO (detto di CRAMER) un metodo di SOSTITUZIONE o meglio di ELIMINAZIONE (più sistematico): questo sarà oggetto di lezione a CALCOLO NUMERICO.

Qui abbiamo solo stabilito che la soluzione esiste ed è unica

$$\begin{cases} 2x - \cancel{y} + 3z = 1 \\ 4x + y + z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

<u>Metodo</u> di <u>Gauss-Jordan</u> o metodo di eliminazione delle variabili, per la soluzione dei sistemi.

Associo al sistema la matrice dei coefficienti orlata con la colonna dei termini noti

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

m. dei coeff. — col. dei t.n.

Sommo un multiplo della 1ª riga alla 2ª (−2 volte) e alla 3ª (−1 volte)

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4-4 & 1-(-2) & 1-6 & 0-2 \\ 2-2 & 2-(-1) & -3-3 & 1-1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right]$$

La matrice trovata corrisponde al sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 3y - 5z = -2 \\ 3y - 6z = 0 \end{cases}$$

Ho eliminato la variabile x dalle ultime 2 equazioni

Ora sottraggo la 2ª riga dalla 3ª

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -6+5 & 0+2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

La matrice trovata corrisponde al sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 3y - 5z = -2 \\ -z = 2 \end{cases}$$

Ora cerco di far comparire degli zeri sopra la diagonale e degli 1 nella diagonale:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 3 & \boxed{-5} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Sommo 5 volte l'ultima riga alla 2ª e −3 volte l'ultima alla 1ª

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3-3 & 1+6 \\ 0 & 3 & 0 & -2-10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \boxed{-1} & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

sommo la 2ª riga alla 1ª

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

che si rilegge

$$\begin{cases} x = 3/2 \\ y = -4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Usando il metodo di Gauss-Jordan si calcola BENE la matrice inversa di una matrice data.

Vediamo un esempio nel caso 2x2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare l'inversa di A significa trovare

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{t.c.} \quad AB = I$$

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2b_{11} + 3b_{21} \\ 1 \cdot b_{11} + 0\, b_{21} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2b_{12} + 3b_{22} \\ 1\, b_{12} + 0 b_{22} \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2b_{11} + 3b_{21} = 1 \\ 1 \cdot b_{11} + 0 \cdot b_{21} = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 2b_{12} + 3b_{22} = 0 \\ 1b_{12} + 0b_{22} = 1 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

le metto insieme così: $(A \mid I) =$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 - 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right] = [I \mid A^{-1}] \qquad A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

---

Come si risolve il problema della risolubilità di un sistema lineare $m \times n$ generico?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

potrei riscrivere l'uguaglianza come comb. lineare di vettori

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Cioè la risolubilità del sistema significa che il vettore $\underline{b}$ dei termini noti è comb. lineare delle colonne della matrice dei coefficienti (e quindi è da loro dipendente)

## Rango di una matrice

Fondamentale per stabilire se un sistema è o no risolubile.

Il rango di $A$ è il massimo numero di vettori riga (o colonna: è lo stesso) linearmente indipendenti che stanno in $A$.

... non è la definizione ufficiale del testo ma serve a non fare conti inutili.

ES. rango di $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} =$

Se non si vede a occhio ... diamo questa definizione (equivalente):

rango di $A$ è il più grande intero $r$ ($\leq \min(m,n)$) tale che esista in $A$ una sottomatrice quadrata di ordine $r$ con determinante $\neq 0$.

ES. Se $A$ è quadrata e $\det A \neq 0$, $rg A = n$.

ES. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ ha rango 2 perché ...

ES. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango 2 perché $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

VERIFICA A LATO

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Quante sono le sottomatrici quadrate di ordine 3 che posso estrarre? 4

Quante sono le sottomatrici quadrate di ordine 2 che posso estrarre?

$\binom{4}{2} \cdot 3 = 18$

di ordine 1 sono 12

i 4 det 3x3 sono $= 0$ quindi $rg A < 3$. Ma $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -8$ è non nullo $\Rightarrow$ quindi $rg A = 2$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & \boxed{1} \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} =$

$= 4+9 - (-1-6) + 4(+3-8) =$

$= 13+7-20 = 0$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} =$

$= \cancel{-8}+\cancel{15} - (\cancel{2}-10) - 15 = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$

$-\cancel{11} - 2\cancel{(-11)} + (-6-5) = 0$

$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 44 - 33 - 11 = 0$

È scomodo.

Per abbreviare, usare la seguente condizione sufficiente

$rg\,A = r$ se e solo se esiste una sottomatrice quadrata di A di ordine r con determinante $\neq 0$

e tutte le sottomatrici di ordine $r+1$ che si ottengono orlando tale matrice .... hanno determinante nullo.

Nel caso precedente $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \neq 0$

$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 0$ $\Rightarrow rg\,A = 2$

$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 0$

ESERCIZIO.

Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} 7 & 2K & \boxed{8} & \boxed{9} \\ 1 & -2 & K & K+1 \\ 2K & 1 & \boxed{5} & \boxed{6} \end{pmatrix}$ al variare del numero reale k

vedi pag succ.

conclusioni: $rg\,A = 3 \quad \forall k \neq 2$

$rg\,A = 2 \quad$ per $k = 2$

$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & 1 \end{matrix} & 4 \\ \begin{matrix} 5 & -2 \end{matrix} & 3 \end{pmatrix}$

$\det[-1] \neq 0$

$\Rightarrow rg\,A \geq 1$

$\det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

$\Rightarrow rg\,A \geq 2$

La matrice $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ si può orlare solo in due modi perché la colonna è fissata e la riga può essere scelta tra la $3^a$ e la $4^a$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ (vedi conti prec.)

e

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Visto che tutte le matrici di ordine 3 ottenute orlando la sottomatrice 2x2 a $\det \neq 0$ hanno $\det = 0$ $\Rightarrow rg\,A = 2$

È il cosiddetto:

$\boxed{\text{METODO DI KRONECKER}}$

Calcolare il rango di

$$\begin{bmatrix} 7 & 2k & \boxed{8} & \boxed{9} \\ 1 & -2 & k & k+1 \\ 2k & 1 & \boxed{5} & \boxed{6} \end{bmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 48-45 \neq 0$

Per ogni valore di k il rg della matrice è $\geq 2$

Orliamola

$$\begin{vmatrix} 2k & 8 & 9 \\ -2 & k & k+1 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ k & k+1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2k & 9 \\ -2 & k+1 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 2k & 8 \\ -2 & k \end{vmatrix} =$$

$$= -k+8 - 5(2k^2 + 2k + 18) + 6(2k^2 + 16) =$$

$$= 2k^2 - 11k + 14 = 0$$

$$k = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 8 \cdot 14}}{4} = \frac{11 \pm 3}{4} \begin{cases} 7/2 \\ 2 \end{cases}$$

se $k \neq 7/2, 2$ esiste una matrice $3\times3$ che ha det $\neq 0$ ed è esattamente quella evidenziata!

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & k & k+1 \\ 2k & 5 & 6 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} k & k+1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ 2k & 6 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 1 & k \\ 2k & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(k-5) - 8(-2k^2 - 2k + 6) + 9(-2k^2 + 5) =$$

$$= -2k^2 + 23k - 38$$

per $k = 7/2$ è $=0$? ~~no~~ $\Rightarrow$ per $k=7/2$ questa matr. ha det $\neq 0$ $\Rightarrow$ rg $A = 3$

per $k=2$ è $=0$? $-8+46-38=0 \Rightarrow$ rg $A=2$

# TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è risolubile $\Leftrightarrow$ rg$(A) =$ rg$(A|\underline{b})$

Es.

$$\begin{cases} x + w = k \\ y + z = k-1 \\ x + z = 2k-1 \\ y + w = k-3 \end{cases}$$

è risolubile se ...

... e in tal caso le soluzioni sono ......

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} k \\ k-1 \\ 2k-1 \\ k-3 \end{pmatrix}$$

La matrice A ha det $=0$ (visto la volta scorsa) $\Rightarrow$ rg $A < 4$

Qual è il rango di A. Usando metodo di Kronecker

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Esiste una sottomatrice quadrata di A, di ordine 3 con det. $\neq 0$

$\Rightarrow$ rg $A = 3$

Il sistema è risolubile se e solo se $(A|\underline{b})$ ha rango 3. Si ha:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 1 & 1 & 0 & k-1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2k-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & k-3 \end{array}\right)$$

det $=0$

rg$(A|\underline{b}) \geq 3$ perché contiene la sottomatrice A e la A'

Basta verificare per quali k:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 & k-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2k-1 \\ 0 & 1 & 0 & k-3 \end{vmatrix} = 0$$

Per tali k il sist è risolubile

$$1\begin{vmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ 0 & 1 & 2k-1 \\ 1 & 0 & k-3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & k-1 \\ 1 & 0 & k-3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ 0 & 1 & 2k-1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} + \quad (-k) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ 0 & 1 & 2k-1 \\ 0 & 0 & 2k-3 \end{vmatrix} + (-k) = k-3 = 0$$

se $k=3$ il sist è risolubile
altrimenti no, perché $rg(A|b)=4$
se $k \neq 3$.