Dunque, una volta stabilito che il sistema

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

è risolubile, per la soluzione procedo così:

- isolo la sottomatrice A'' di A che ha rango massimo;
  quella che ha la [illegible] proprietà: $rg\, A = rg(A|\underline{b}) = r$

  tutte le altre righe di $(A|\underline{b})$ dipendono linearm. dalle righe di $(A|\underline{b})$ che contengono questa sottomatrice: quindi le corrispondenti equazioni nel sistema risultano INUTILI per la soluzione e di conseguenza

- elimino tali $m-r$ equazioni.
  Così ho un sistema $A'\underline{x} = \underline{b}$ di r equazioni in n incognite, avente rango massimo.

- penso come vere incognite quelle corrispondenti alle colonne di A'', mentre uso le altre come parametri e conseguentemente porto queste $n-r$ parametri (con relativi coefficienti) al 2° membro: avrò una colonna di termini noti dipendenti da parametri

- Risolvo il sistema di r equazioni in r incognite risultante, ad es. col metodo di Cramer: se queste incognite si chiamano $x_1, \dots, x_r$, le soluzioni sono del tipo

  $x_1 = f_1(k_{r+1}, \dots, k_n), \dots, x_r = f_r(k_{r+1}, \dots, k_n), x_{r+1} = k_{r+1}, \dots, x_n = k_n$

  con $k_{r+1}, \dots, k_n$ variabili comunque in $\mathbb{R}$
  e $f_1, \dots, f_r$ funzioni razionali fratte in $k_{r+1}, \dots, k_n$
  $\Rightarrow \infty^{n-r}$ SOLUZIONI

ES:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x \quad\; - 2z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 3 + z \\ x = 5 + 2z \end{cases}$$

la matrice $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$ ....

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = \frac{1}{2}(-x + 3 + z) = \frac{1}{2}(-5 - 2t + 3 + t) \\ z = t \end{cases}$$

MAT ASS 13.1 (11)

$A\underline{x} = \underline{b}$ È risolubile questo sistema?

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3t = 1 \\ -x + y + 5z + t = 2 \\ 3x - y - 12z + t = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -12 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

posso calcolarne il rango sostanzialmente usando il metodo di Gauss

Tolgo 3 volte la I^a riga alla III^a

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -6 & -8 & -3 \end{array}\right]$$

aggiungo 2 volte la II riga alla III

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$rg(A|b) = 3$

$\Rightarrow rg\, A = 2$

$\Rightarrow$ sist. non risolubile

13.11 (10)

$$\begin{cases}(k+1)x + ky = 1\\ -kx + z = 1\\ x+y+z = 2\end{cases}$$

è risolubile?

3 eq. in 3 incognite

$$(A|\underline{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} k+1 & k & 0 & 1\\ -k & \boxed{0} & \boxed{1} & 1\\ 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & 2\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} rg\,A \geq 2\\ rg(A|\underline{b}) \geq 2\end{array}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} k+1 & k & 0\\ -k & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+1 & k & 0\\ -k-1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} k+1 & k\\ -(k+1) & -1\end{vmatrix} = (k+1)(-1+k) = 0 \quad \begin{array}{l} k=1\\ k=-1\end{array}$$

Se $k \neq \pm 1 \Rightarrow$ il sist. è risolubile

se $k = \pm 1$, considero:

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} k & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} k & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 2k-1-k = k-1$$

se $k=1$ tanto $rg\,A$ che il $rg(A|\underline{b})$ valgono 2 $\Rightarrow$ sistema risolubile

se $k=-1$ $rg(A|\underline{b}) = 3 \neq 2 = rg\,A \Rightarrow$ sist non risolubile

Cerchiamo le soluz. del sistema nei due casi

$k \neq \pm 1$ ($rg\,A = 3$) e $k = 1$ ($rg\,A = 2$)

$\boxed{k \neq \pm 1}$ Risolvo con il metodo di Cramer

$\det A = k^2 - 1$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}}{k^2-1}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} k+1 & 1 & 0\\ -k & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}}{k^2-1} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} k+1 & k & 1\\ -k & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}{k^2-1}$$

$x = \frac{1}{k+1}$, $y = \_\_\_$ $z = \_\_\_$ ecc.

$\boxed{k = 1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1}\\ -1 & \boxed{0} & \boxed{1} & 1\\ 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & 2\end{array}\right]$$

sistema equivalente

$$\begin{cases} -x + z = 1\\ x + y + z = 2\end{cases}$$

si risolve a occhio (o a mano)

attenendosi alle strategie generali esposte in precedenza

$$\begin{cases} z = 1 + x\\ y + z = 2 - x\end{cases}$$

(perché la matrice 2×2 di cui ho stabilito che il det è ≠ è quella degli elem di posto (2,2) (2,3) (3,2) (3,3))

$$\begin{cases} z = 1 + x\\ y = 1 - 2x\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t\\ y = 1 - 2t\\ z = 1 + t\end{cases}$$

soluzioni: $(t, 1-2t, 1+t)$

AUTOVALORI e AUTOVETTORI DI UNA MATRICE

Le matrici $n \times n$ realizzano delle "trasformazioni" dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ in sé: $\underline{x}' = A\underline{x}$

ES.1. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ realizza la rotazione di un angolo α in $\mathbb{R}^2$

Es.2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ realizza una trasformazione che dilata di un fattore 2 nella direzione dell'asse x e di " " 3 " " " " y

Es 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ realizza la simmetria rispetto all'asse x

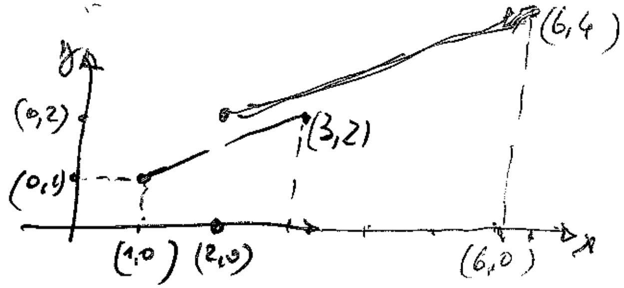
Es 4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ realizza la simmetria rispetto alla bisettrice del 1°-3° quadrante

Es5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ realizza la proiezione ortogonale sull'asse x.

Per altre matrici è meno facile descrivere l'azione geometrica corrispondente.
Utile in questo senso stabilire se ci sono direzioni "privilegiate" che vengono trasformate in se stesse applicando A.
È ciò che succede in Es 2., 3., ~~5~~ per le direzioni dell'asse x e y e in Es.4 per le direzioni delle 2 bisettrici del 1°-3°, 2°-4° quadrante.

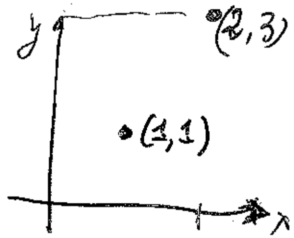
ESEMPIO (3/2)

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$$

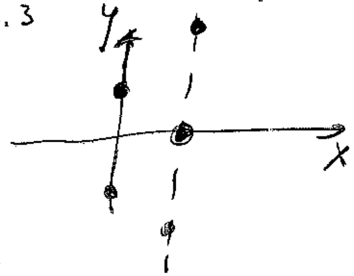


ESEMPIO 2

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3x \end{cases}$$



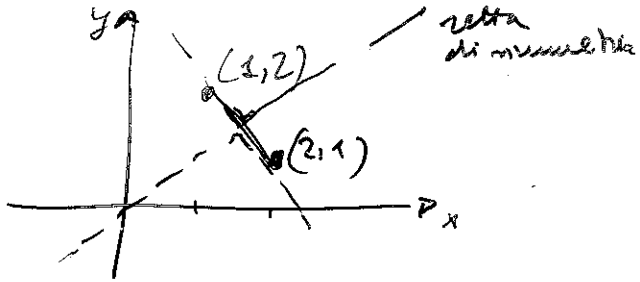
ES. 3



$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

ES4

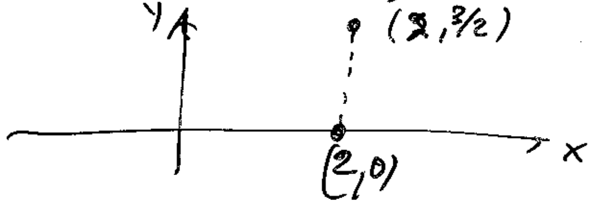
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$



ES5

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è una trasformazione in senso proprio (poiché la matrice non è invertibile)

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 0 \end{cases}$$



Questa condizione si traduce nella richiesta che esistano vettori $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus (\underline{0})$ e scalari $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x},$$

λ autovalore di A
$\underline{x}$ autovettore di A relativo a λ

cioè

$$A\underline{x} = (\lambda I)\underline{x}$$

(λI è la matrice diagonale con λ in ogni posizione)

cioè

$$(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0} \qquad (*)$$

Dunque il problema si riconduce a trovare dei valori λ tali che il sistema OMOGENEO (*) non abbia solo la soluzione nulla, bensì almeno una intera "direzione" di soluzioni.
Ciò si realizza per

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Equazione caratteristica di A: è polinomiale di grado n
Nel caso $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A.$$

ATTENZIONE: la ricerca di autovalori e autovettori ha soluzioni dipendenti dal campo numerico.
Ad es. se penso $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ come matrice a coefficienti reali, devo cercare $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ ... ed è chiaro che non li trovo, se $\alpha \neq 0, \pi$:

$$\lambda^2 - 2(\cos\alpha)\lambda + 1 = 0 \quad \text{ha} \quad \frac{\Delta}{4} = \cos^2\alpha - 1 \leq 0$$

Ma se penso A a coefficienti in $\mathbb{C}$, e posso quindi cercare $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\underline{x} \in \mathbb{C}^2$, le soluzioni ci sono:

$$\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm i \operatorname{sen}\alpha \;\Rightarrow\; (\cos\alpha - \cos\alpha \mp i\operatorname{sen}\alpha)x_1 - \operatorname{sen}\alpha\, x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = \pm x_1 \cdot i \;\Rightarrow\; \text{autovettore di } \lambda_1 : (t, it) \qquad \lambda_2 : (t, -it)$$

Vediamo qualche esempio semplice

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & -4-\lambda \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 3\lambda + 0 = 0 \quad \text{per } \lambda = 0, \; \lambda = -3$$

Ricerca autovettori:

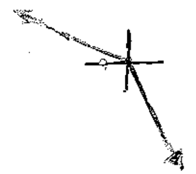
$$(A - 0 \cdot I)\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 - 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

[illegible]

Autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 0$: $\underline{x} = (-2t, t)$

$$(A + 3I)\underline{x} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 - 1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Autovettori relativi all'autovalore $\lambda = -3$: $\underline{x} = (t, -2t)$



Direzioni privilegiate

N.B. Quando $\det A = 0$, l'autovalore 0 c'è sempre

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad \text{per } \lambda = 1 \text{ e } \lambda = 2$$

se la matrice è triangolare gli autovalori si leggono direttamente sulla diagonale di A

Ricerca degli autovettori:

$\lambda = 1$: $(A - I)\underline{x} = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ 1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ autovettore $(t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$

$\lambda = 2$: $(A - 2I)\underline{x} = \begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ autovettori $(3t, t)$, $t \in \mathbb{R}$

Direzioni privilegiate

è sempre vero che se $\det A = 0$ allora uno dei suoi autovalori è $\lambda = 0$?

Sì certo! per definizione di autovalore.

DIAGONALIZZABILITÀ. Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

autovett. $\underline{v}_1 = (t, 0)$ $\underline{v}_2 = (3t, t)$

$$(A)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\left(\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \Delta$$

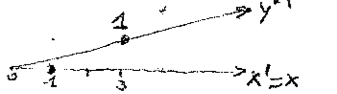
In generale se

$U = (\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ con $\underline{v}_1$ autovett. rel. a λ_1

$\underline{v}_2$ " " a λ_2

e $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow U^{-1}AU = \Delta$ è diagonale

GEOMETRICAMENTE: nel sistema di riferimento $x'y'$



L'azione della trasformazione che nel piano xy è rappresentata da A corrisponde a una dilatazione di 1 (cioè identità) lungo la direzione di x' e a una dilatazione di 2 lungo l'asse y'.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$

2 è un autovalore "doppio"

Autovettori corrispondenti: $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $(t, 0)$ $t \in \mathbb{R}$

In questo caso ci sono <u>due</u> autovalori coincidenti e <u>una sola</u> direzione privilegiata indipendente

Invece se parto da $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ci sono anche due direzioni privilegiate indipendenti. (∞ in realtà!)

Il numero di direzioni privilegiate indipendenti prodotte da un autovalore si chiama MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA dell'autovalore

Invece la sua molteplicità algebrica è la molteplicità dell'autovalore pensato come radice dell'equazione caratteristica.

Si dimostra

$$m.g. \le m.a.$$

e se per ogni autovalore di A vale $=$

e la somma delle m.a. degli autovalori è $= n$

esiste una matrice invertibile U tale che

$$U^{-1} A U \text{ è diagonale}$$

e i suoi elementi non nulli sono gli autovalori (ciascuno presente con la sua m.a.)

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

equazione caratteristica: $(6-\lambda)((5-\lambda)^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow$ autovalori $\lambda = 4$ e $\lambda = 6$ con molteplicità algebrica 2

Autovettori relativi a $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -t \end{cases}$$

gli autovettori hanno la forma $(t, 0, -t)$, $t \in \mathbb{R}$

Autovettori relativi a $\lambda = 6$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_3 \\ 0 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$$

gli autovettori hanno la forma $(t, s, t) = t(1,0,1) + s(0,1,0)$
Si vede che ci sono due direzioni privilegiate indipendenti, ad es. $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$ ... corrispondenti ad avere 2 parametri nelle soluzioni.

Ora osservo che

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

In generale la matrice U si costruisce proprio accostando i vettori colonna corrispondenti agli autovettori indipendenti