19/12/2008

Risolubilità di

$$\begin{cases} kx + y - z = 2k \\ -x + (1-k)y + (2k-1)z = 0 \\ x + kz = 4 \end{cases}$$ si dipende da k

Quante sol. attese $\forall k$ per cui esiste soluz. Determinarle.

$$[A|\underline{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{k} & \boxed{1} & -1 & 2k \\ -1 & 1-k & 2k-1 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & k & 4 \end{array}\right)$$

rg A ? rg(A|b) ?

$3 \geq \text{rg} A \geq 2$ perché la matrice $\begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ha det $\neq 0$.

Osservo che:

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ -1 & 1-k & 2k-1 \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1-k & 2k-1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} k & 1 \\ -1 & 1-k \end{vmatrix} =$$

$$= 2k - \cancel{1} + \cancel{1} - k + k(k - k^2 + 1) =$$

$$= k(k - k^2 + 2) = 0$$ se e solo se $k=0$ oppure $k=-1$ oppure $k=2$

Quindi rg A è sicuramente 3 per $k \neq 0, -1, 2$

Mentre per $k = 0, -1, 2$ rg A è sicuramente 2

Studiamo il rg(A|b). [A|b] contiene A come sottomatrice sicuramente $\text{rg}(A|b) \geq \text{rg} A \geq 2$

se $k \neq 0, -1, 2$ $\text{rg}[A|b] = \text{rg} A = 3$ perché $\text{rg}(A|b) \leq 3$ visto che è una matrice 3×4

$\Rightarrow$ il sistema è risolubile con soluz. unica. Via teor di Cramer la soluz è (x, y, z) con

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2k & 1 & -1 \\ 0 & 1-k & 2k-1 \\ 4 & 0 & k \end{vmatrix}}{k(1-k)(k-2)} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} k & 2k & -1 \\ -1 & 0 & 2k-1 \\ 1 & 4 & k \end{vmatrix}}{k(1-k)(k-2)} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 2k \\ -1 & 1-k & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{k(1-k)(k-2)}$$

Se $k = 0, -1, 2$?

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 2k \\ -1 & 1-k & 2k-1 & 0 \\ 1 & 0 & k & 4 \end{array}\right)$$

via teor. di Kronecker so che basta vedere se è $=0$ o $\neq 0$ il det

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 2k \\ -1 & 1-k & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2k \\ 1-k & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} k & 1 \\ -1 & 1-k \end{vmatrix} =$$

$$= -2k(1-k) + 4(k - k^2 + 1)$$

questo det. per $k=0$ vale $4 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A|b) = 3$

$\Rightarrow$ il sist non è risolubile.

Per $k = -1$: $+2 \cdot 2 + 4(-1 - \cancel{1} + \cancel{1}) = 0 \Rightarrow$ $\text{rg}(A|b) = 2$ il sistema è risolubile.

Quante soluz. ha? infinite dipendenti da 1 parametro poiché ci sono 2 sole equazioni indipendenti in 3 incognite. Tengo solo la 1ª e la 3ª equazione.

$\begin{cases} -10x + y - \cancel{z} = -2 \\ x \quad -z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4-z+y-z=-2 \\ x=4+z \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2+2z \\ x=4+z \end{cases}$ $\Rightarrow$ le soluz dei sistema sono le terne (x,y,z) della forma

$$(4+t\,,\ 2+2t\,,\ t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\boxed{k=2}$ $\quad \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -2\cdot 2(1-2)+4(2-4+1) = 4-4=0$

$\Rightarrow$ $rg(A|b)=2$ $\Rightarrow$ il sistema è risolubile e le sue soluz. sono oo dipendenti da $3-2=1$ parametro

n° variabili $\quad$ rg A

~~2x+y+w~~ = $\quad \begin{cases} 2x+y-z=4 \\ x \quad +2z=4 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 4-2z \\ y = \cancel{4}+z-\cancel{8}+4z \end{cases}$ $\qquad$ soluzioni:

$(x,y,z) = (4-2t, -4+5t \quad ,t)$

In dipendenza da k risolvere il sistema

$$\begin{cases} (k+2)x + 2ky - z - w = 0 \\ x - 2y + kz + kw = 0 \\ \quad y + z - kw = 0 \end{cases}$$

Omogeneo
3eq. e 4 incognite

È risolubile e il numero di parametri da cui dipendono le soluzioni dipende dal $\underline{rg\,A}$: # parametri $= 4 - rg\,A$.

$$\begin{bmatrix} k+2 & 2k & -1 & -1 \\ 1 & -2 & k & k \\ 0 & 1 & 1 & -k \end{bmatrix} = A \qquad rg\,A \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} k+2 & 2k & -1 \\ 1 & -2 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} k+2 & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k+2 & 2k \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$= -k^2-2k-1 - 2k-4-2k =$

$= -k^2-6k-5 = 0$

$k^2+6k+5=0$ per $\underline{k=-1}, -5$

$$\begin{vmatrix} k+2 & 2k & -1 \\ 1 & -2 & k \\ 0 & 1 & -k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} k+2 & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} k+2 & 2k \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$= -(k^2+2k+1) - k(-4k-4) =$

$= 3k^2+2k-1$

per $k=-1$ questo det. si annulla
per $k=-5$ " " non si annulla

se $k=-1$ $\quad$ rg $A=2$

se $k\neq -1$ $\quad$ rg $A=3$

$\Rightarrow$ se $k\neq -1$ ci sono ∞ soluzioni dipendenti da 1 parametro

se $k=-1$ ci sono ∞ soluzioni dipendenti da 2 parametri

Calcolo.

$k=-1$ $\qquad A=\begin{pmatrix}1&-2&-1&-1\\1&-2&-1&-1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$

posso usare il metodo di Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix}1&-2&-1&-1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x=-z-w\\y=-z-w\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}x=-h-m\\y=-h-m\\z=h\\w=m\end{cases}$$

$$(-h-m,-h-m,h,m)=(-h,-h,h,0)+(-m,-m,0,m)=$$
$$=h(-1,-1,1,0)+m(-1,-1,0,1)$$

a mano d'occhio...

se $k\neq -1$ le equazioni contengono parametro.

Supponiamo $k\neq -1,-5$ ($\neq 0$ il det della matrice formata dalle prime 3 colonne)

Risolvere il ns sistema è come risolvere

$$\underbrace{\begin{cases}(k+2)x+2ky-z=w\\x-2y+kz=-kw\\y+z=kw\end{cases}}_{\text{qs. matrice ha det}\neq 0}$$

ove w è pensato come parametro variabile in $\mathbb{R}$

qs. matrice ha det $\neq 0$: posso usare il metodo di Cramer

$$x=\frac{\begin{vmatrix}w&2k&-1\\-kw&-2&k\\kw&1&1\end{vmatrix}}{(k+1)(k+5)}=\frac{\begin{vmatrix}1&2k&-1\\-k&-2&k\\k&1&1\end{vmatrix}w}{(k+1)(k+5)}=\frac{a_1}{a}w$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}k+2&1&-1\\1&-k&k\\0&k&1\end{vmatrix}w}{(k+1)(k+5)}=\frac{a_2}{a}w\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}k+2&2k&1\\1&-2&-k\\0&1&k\end{vmatrix}w}{(k+1)(k+5)}=\frac{a}{a}$$

$$\begin{cases}x=\frac{a_1}{a}t\\y=\frac{a_2}{a}t\\z=\frac{a_3}{a}t\\w=t\end{cases}\qquad \frac{t}{a}=s\qquad \begin{cases}x=a_1s\\y=a_2s\\z=a_3s\\w=as\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}k+2&2k&-1&-1\\1&-2&k&k\\0&1&1&-k\end{bmatrix}$$

verifica successivo il legame

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3w = 0 \\ -x + y + 5z + w = 0 \\ -y + 12z + 2w = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 12 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = -3w \\ -x + y + 5z = -w \\ -y + 12z = -2w \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3w & 1 & -2 \\ -w & 1 & 5 \\ -2w & -1 & 12 \end{vmatrix}}{27} = \frac{\begin{vmatrix} +3 & 1 & -2 \\ +1 & 1 & 5 \\ +2 & -1 & 12 \end{vmatrix}(-w)}{27}$$

det. della matr. che si ottiene togliendo la I colonna a_1

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix}(-w)}{27} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}(-w)}{27}$$

det della matr. che si ottiene togliendo la III colonna $= a_3$

— il determinante della matrice che si ottiene togliendo la II colonna è $-a_2$

$$\begin{cases} w = t \\ x = \frac{a_1}{27}(-w) \\ y = \frac{-a_2}{27}(-w) \\ z = \frac{a_3}{27}(-w) \end{cases} \qquad \frac{-w}{27} = s \qquad \begin{cases} x = a_1 s \\ y = -a_2 s \\ z = a_3 s \\ w = -27 s \end{cases}$$

det. ottenuto togliendo la 4ª colonna

$y'' + 4y = \operatorname{sen} 2t$ — Eq. diff lineare del 2° ordine a coeff cost. completa.

Omog. associata

$z'' + 4z = 0 \implies$ Eq. caratteristica $r^2 + 4 = 0 \implies r = \pm 2i$

posso scegliere le due soluz. "indipendenti" (complesse) nella forma e^{2it}, e^{-2it} oppure tenuto conto che $e^{2it} = \cos 2t + i \operatorname{sen} 2t$ oppure nella forma

$\cos 2t$ e $\operatorname{sen} 2t$ (reali)

Soluzione dell'omog. associata

$c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t$

$\boxed{at \cos 2t} = \bar{y}$ soluz. particolare?

$\bar{y}'(t) = a \cos 2t - 2at \operatorname{sen} 2t$

$\bar{y}''(t) = -2a \operatorname{sen} 2t - 2a \operatorname{sen} 2t - 4at \cos 2t$

sostituisco in $y'' + 4y = \operatorname{sen} 2t$

$-4a \operatorname{sen} 2t - 4at\cancel{\cos 2t} + 4at\cancel{\cos 2t} = \operatorname{sen} 2t$

$(-1 - 4a) \operatorname{sen} 2t \equiv 0 \quad \forall t \implies a = -\frac{1}{4}$

Sol particolare: $\bar{y}(t) = -\frac{1}{4} t \cos 2t$

Sol. generale: $y(t) = -\frac{1}{4} t \cos 2t + c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t$

$$|z|z = \frac{-4+4\sqrt{3}\,i}{z} \qquad z \neq 0$$

$$|z|z^2 = -4+4\sqrt{3}\,i = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\rho\cdot\rho^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta) = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ k = 0,1 \end{cases}$$

Due soluzioni opposte:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$z = -1 - i\sqrt{3}$$

$$|-4+4\sqrt{3}\,i| = |4(-1+\sqrt{3}\,i)| = 4\sqrt{1+3} = 8$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

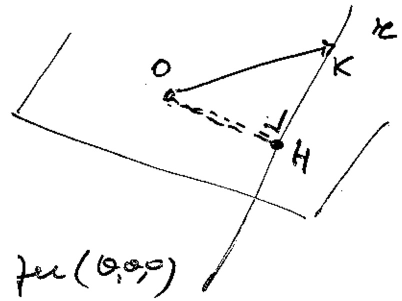
$$(z-i)^4 = 1+\sqrt{3}\,i$$

$$w = z - i \quad \Rightarrow \quad w^4 = 1+\sqrt{3}\,i$$

Calcolo le radici quarte w_k di $1+\sqrt{3}\,i$ e le sostituisco in $z - i = w_k$

Calcolare la distanza dall'origine di

$$s: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases}$$



$v_s = (1,-1,-2)$

piano $\perp$ a s passante per $(0,0,0)$

$$1(x-0) - 1(y-0) - 2(z-0) = 0$$

$$\pi: \quad x - y - 2z = 0$$

$$\pi \cap s: \quad (2+t) - (-t) - 2(-2t) = 0$$

$$2 + 6t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1/3$$

$$\Rightarrow \quad H = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\overline{OH} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{25+1+4}}{3} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$