NUMERI ... quali?

NATURALI: $(\mathbb{N},+,\cdot)=\{1,2,3,\dots,n,\dots\}$
con le operazioni di somma e prodotto

inverso di un numero?

INTERI NON NEGATIVI:
$\mathbb{N}\cup\{0\}$

RAZIONALI POSITIVI: $\mathbb{Q}^* =$
$= \{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \dots, \frac{p}{q}, \dots\}$
con $p,q \in \mathbb{N}$ e
$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff_{\text{def}} pq' = p'q$

opposto di un numero?

INTERI (relativi): $\mathbb{Z} =$
$= \{0, 1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots\}$

inverso di un numero non nullo?

RAZIONALI (relativi): $\mathbb{Q} =$
$= \{0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \dots, \pm \frac{p}{q}, \dots\}$
con $p,q \in \mathbb{N}$ e la regola di identificazione vista sopra.

SIMBOLOGIA

$X \subseteq Y$: l'insieme X è contenuto in Y (cioè tutti gli elementi di X sono anche elementi di Y).

$x \in X$: l'elemento x appartiene ad X (cioè sta in X)

$X \cup Y$: insieme unione di X e Y (insieme degli elementi che stanno in X o in Y)

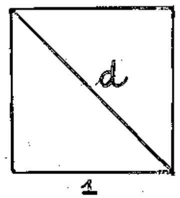
$\iff$: "se e solo se" $\qquad X \cap Y$ = intersezione

IL PROBLEMA DEI NUMERI REALI.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}$ nascono come ampliamenti successivi di $\mathbb{N}$ conseguenti a pure richieste algebriche (che esprimono esigenze concrete ...).
Invece i NUMERI REALI ($\mathbb{R}$) vengono introdotti in risposta a quesiti alcuni dei quali possono essere tradotti algebricamente, altri no.

ESEMPI.

1. Se un quadrato ha il lato lungo 1 (rispetto ad un'unità di misura prefissata) qual è la lunghezza d della sua diagonale?



Il teor. di Pitagora permette una espressione algebrica del problema:

(*) $\quad d^2 = 1+1 = 2$

Si dirà che d (soluzione di un'eq. algebrica) è un NUMERO ALGEBRICO.
Ma nessun numero razionale $\frac{p}{q}$ soddisfa la (*)!

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

$d = \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$ con p e q interi primi tra loro

ASSURDO

$\Downarrow$

$2q^2 = p^2$

$\Downarrow$

2 divide p : $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ 2 divide q

$\Downarrow \qquad\qquad \Uparrow$

$2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$

PROPRIETÀ DEI RAZIONALI: $\mathbb{Q}$

ALGEBRICHE:

in $\mathbb{Q}$ sono definite due operazioni: $+, \cdot$
con le seguenti proprietà:

A0 $\forall a,b \in \mathbb{Q}$: $a+b \in \mathbb{Q}$ | $a \cdot b \in \mathbb{Q}$ M0

A1 $a+b=b+a$ | $a \cdot b = b \cdot a$ M1

A2 $\forall a,b,c \in \mathbb{Q}$: $(a+b)+c = a+(b+c)$ | $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ M2

A3 $\exists z, u \in \mathbb{Q}$: $\forall a \in \mathbb{Q}$ $a+z=a$ | $a \cdot u = a$ M3

z: zero 0 | u: unità 1

A4 $\forall a \in \mathbb{Q}$ $\exists \bar{a} \in \mathbb{Q}: a+\bar{a} = z$

$\bar{a}$: opposto di a | $-a$

$\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ $\exists a' \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$: | $a \cdot a' = u$ M4

a': reciproco di a $\quad \frac{1}{a}, a^{-1}$

D $\forall a,b,c \in \mathbb{Q}$: $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b \cdot c$

$\Downarrow$

$\forall a,b \in \mathbb{Q}$:
$$0 \cdot b = 0$$
$$(-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -(a \cdot b)$$
$$(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$$

CONSEGUENZA DELL'ESISTENZA DEL RECIPROCO:

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO:
$$a \cdot b = 0 \text{ e } a \neq 0 \Rightarrow b = 0$$

PROPRIETÀ DI ORDINAMENTO:

in $\mathbb{Q}$ è definito un ordinamento:
se $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e n, q sono numeri interi positivi (m, p interi qualunque)
$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \iff q \cdot m \leq p n$$

Es. $\frac{1}{n} < \frac{p}{1} = p$ se $p>0$ e $n>0$

$-\frac{7}{2} < \frac{1}{100}$

$\frac{2^7}{3^4} > \frac{3}{2}$ ma $\frac{2^7}{-3^4} \overset{?}{>} -\frac{3}{2}$

Per esso valgono le proprietà

O1 riflessiva: $\forall a \in \mathbb{Q}$: $a \leq a$

O2 antisimmetrica: $\forall a,b \in \mathbb{Q}$: $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a=b$

O3 transitiva: $\forall a,b,c \in \mathbb{Q}$: $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Inoltre tale ordinamento è compatibile con la struttura algebrica:

C1 $\forall a,b,c \in \mathbb{Q}$: $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$

C2 $\forall a,b,c \in \mathbb{Q}$, $\boxed{c>0}$: $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$

O4 Ed è un ordinamento totale, cioè
$\forall a,b \in \mathbb{Q}$ con $a \neq b$ si ha o $a<b$ o $b<a$.

Insieme dei razionali >0 ...

Conseguenze della compatibilità

C1 $\Rightarrow$ $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$

C2 $\Rightarrow$ $a \leq b$ e $c < 0$ $\Rightarrow$ $bc \leq ac$

$\left.\begin{array}{l} a,b \text{ di segno concorde} \\ a < b \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$a < 0 < b$ $\Rightarrow \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$

ESERCIZI

$\forall a \in \mathbb{Q}$ $a^2 \geq 0$

$\forall a,b \in \mathbb{Q}$ $2ab \leq a^2+b^2$

PROPRIETÀ ARCHIMEDEA: *

$\forall a,b \in \mathbb{Q}$ con $0 < b < a$ $\exists n$ intero positivo t.c. $nb > a$

PROPRIETÀ DI DENSITÀ *

per ogni intero positivo fissato q e per ogni $a \in \mathbb{Q}$ esiste un intero p tale che

$$\frac{p}{q} \leq a < \frac{p+1}{q}$$

Differenza rispetto agli interi.

* Geometricamente ...

Problema di $\sqrt{2}$

(geometricamente) problema dei punti della retta non rappresentati da numeri razionali

Soluzione: ampliamento del CAMPO ORDINATO ARCHIMEDEO $\mathbb{Q}$

Dal punto di vista dell'insieme di numeri: prendo

ogni allineamento decimale
- limitato o non limitato
- periodico o non periodico

IRRAZIONALI

(ATTENZIONE alle necessarie identificazioni:

$0.\bar{9} = \ldots$)

È uno dei tanti MODELLI dell'insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ sono def. $+, \cdot, \leq$ e godono delle proprietà viste in $\mathbb{Q}$.

In più

COMPLETEZZA: dati comunque due sottoinsiemi A, B di $\mathbb{R}$ t.c.

$\forall a \in A$, $\forall b \in B$ risulti $a \leq b$

ESISTE ALMENO un numero reale c t.c.

$a \leq c \leq b$ $\forall a \in A$, $\forall b \in B$

$\frac{p}{q}$ $\quad p+q = r$

$r=1 \quad \frac{0}{1}$

$r=2 \quad \frac{1}{1}$

$r=3 \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{1}$

$r=4 \quad \frac{1}{3}, \cancel{\frac{2}{2}}, \frac{3}{1}$

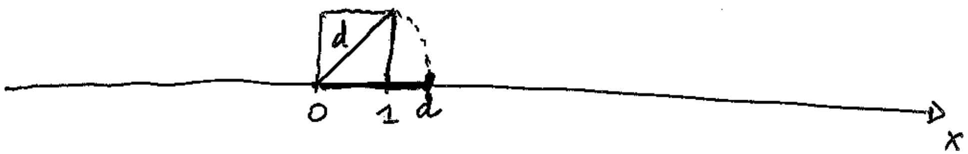
$r=5 \quad \boxed{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}}$ ecc.

numerabilità di $\mathbb{Q}$

---

i numeri razionali hanno cardinalità del NUMERABILE

I punti sulla retta geometrica hanno una diversa cardinalità.



PITAGORA : $d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2$

$d = \frac{p}{q}$ ridotta ai minimi termini

il numero d t.c. $d^2 = 2$ non è razionale.

$\frac{p}{q} \longrightarrow$ numero decimale

se $q = 2^r \cdot 5^s$ nella divisione ottengo un decimale limitato

se $q \neq 2^r \cdot 5^s$ nella divisione ottengo un decimale illimitato MA periodico

$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots = 0,\overline{3}$

$0,\overline{23} = x$

$99x = 100x - x = 23,\overline{23} - 0,\overline{23} = 23$

$\Longrightarrow \quad x = \frac{23}{99}$

$1,\overline{23} \qquad 0,1\overline{23}$

$1,\overline{23} = 1 + 0,\overline{23} = 1 + \frac{23}{99} = \frac{122}{99}$

$\frac{1}{10} \cdot \frac{122}{99} = \frac{122}{990}$

$0,\bar{9} = \frac{9}{9} = 1$

$0,12\bar{9} =$

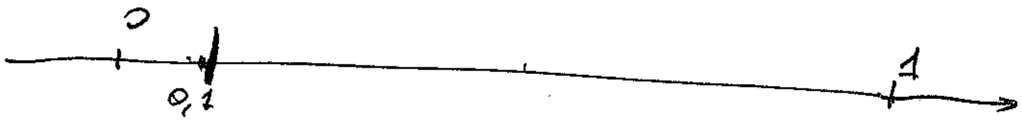
$0,12 + \frac{1}{100} \cdot 0,\bar{9} = 0,12 + \frac{1}{100} = 0,13$

$\mathbb{Q} \longleftrightarrow$ decimali limitati o illim. periodici (opportunamente identificati delle forme $A,a_1 \ldots a_n\bar{9} = \ldots$)

quindi se prendo

0,1010010001000010000 1 . . . .

è un decimale non periodico



Tutti i numeri decimali illimitati non periodici saranno detti IRRAZIONALI e l'unione di tale insieme con $\mathbb{Q}$ dà l'insieme dei reali $\mathbb{R}$

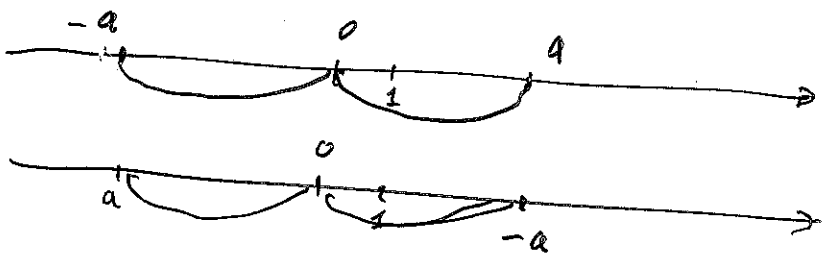
RAZION.

$0,\bar{8}$
$0,\bar{1}$
$0,\bar{9} = 1$

0,88
0,11
0,99

$a + (b \cdot c) \neq (a+b)c$

$(a+b)c$



$a' = \frac{1}{a}$ $\quad a = \frac{p}{q} \quad \frac{1}{a} = \frac{q}{p}$

se $a \in \mathbb{R}$ che cosa significa $\frac{1}{a}$?....

$\cancel{\frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1}$

Legge di annullamento del prodotto

Hp $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ $\quad$ (*) $a \cdot b = 0$

Th: $b = 0$

moltiplico entrambi i membri di (*) per 1/a

$\frac{1}{a} \cdot a \cdot b = \frac{1}{a} \cdot 0 \Rightarrow 1 \cdot b = 0$

$b = 0$

Dim. se $a \neq 0$ esiste il reciproco $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$$x^7-3x^6+2x^5=0$$

uso dell'annullamento del prodotto

$$x^5(x^2-3x+2)=0$$

$2=2\cdot 1$

$3=2+1$

$$x^5(x-1)(x-2)=0$$

o $x^5=0 \iff x=0$

o $x=1$

o $x=2$

l'insieme delle soluzioni è

$$\{0,1,2\}$$

---

un polinomio $P(x)$ di grado n ha al più n radici distinte o coincidenti

$x^2+1=0$ nei reali non ha soluzione

se a,b,c radici di $P(x)$ allora $\exists$ un polinomio $Q(x)$ t.c.

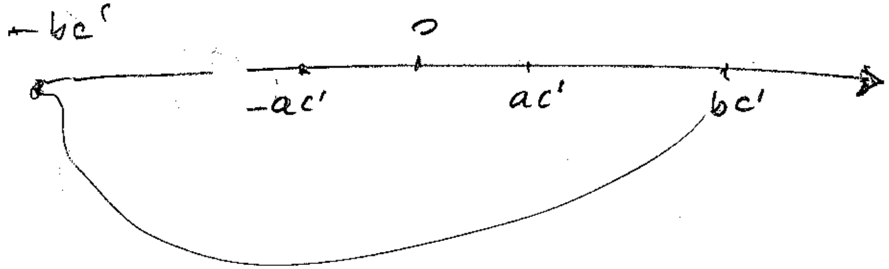
$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)Q(x)$$

$c<0$ $\quad c=-1\cdot c'$ $\quad c'=-c>0$

$a\le b$

$\Downarrow$

$\underline{a\cdot c'}\le \underline{b\cdot c'}$ $\quad -ac' \geq -bc'$



Spiegazione visiva del perché moltiplicando per un numero negativo l'ordine si inverte