Lezione 1 → Lezione 4

Risolvere il Sistema $\begin{cases} 6xy^2-6x^2=0 \\ 6x^2y-6y=0 \end{cases}$

<u>Svolgimento.</u>

Raccolgo $\begin{cases} 6x(y^2-x)=0 \\ 6y(x^2-1)=0 \end{cases}$ e semplifico $\begin{cases} x(y^2-x)=0 \\ y(x^2-1)=0 \end{cases}$

Osservo che

1) risolvere il sistema significa trovare le coppie di numeri (reali) (x,y) che sono soluzioni della 1ª equazione e anche della 2ª: se chiamo $\mathcal{A}$ l'insieme delle soluzioni della 1ª e $\mathcal{B}$ l'insieme delle soluzioni della 2ª, si tratta di trovare $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$

2) ciascuna delle due equazioni si presenta come prodotto di espressioni in x e y uguagliato a zero e che un prodotto di numeri reali è $=0$ <u>se e solo se almeno uno dei fattori è</u> $=0$: e quindi per ciascuna equazione si deve prendere l'unione delle soluzioni.

Schematizzato il sistema come $\begin{cases} \boxed{A1}\cdot\boxed{A2}=0 \\ \boxed{B1}\cdot\boxed{B2}=0 \end{cases}$

basta associare in tutti i modi possibili ciascuna delle equazioni in cui si spezza la 1ª con ciascuna di quelle in cui si spezza la 2ª.

$\begin{cases} \boxed{A1}\cdot\boxed{A2}=0 \\ \boxed{B1}\cdot\boxed{B2}=0 \end{cases}$ 4 sistemi che posso pensare così:

$\begin{cases} x=0 \\ y(x^2-1)=0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} y^2-x=0 \\ y(x^2-1)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ → I Soluzione: $P=(0,0)$

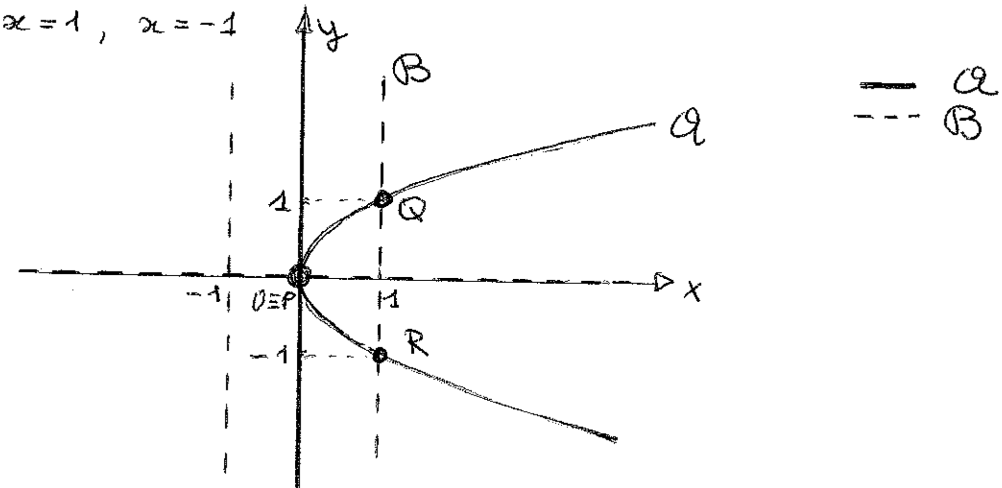
$\begin{cases} x=0 \\ x^2-1=0 \end{cases}$ → nessuna soluzione: $\emptyset$

$\begin{cases} y^2-x=0 \\ y=0 \end{cases}$ → ritrovo la Soluz. P

$\begin{cases} y^2-x=0 \\ x^2-1=0 \end{cases}$ → $\begin{cases} y^2-x=0 \\ x=\pm1 \end{cases}$ → $\begin{cases} y^2+1=0 \\ x=-1 \end{cases}$: $\boxed{\emptyset}$; $\begin{cases} y^2-1=0 \\ x=1 \end{cases}$ → $Q=(1,1)$, $R=(1,-1)$

Quindi le soluzioni del Sistema sono le coppie ordinate $(x,y)=(0,0)$, $(x,y)=(1,1)$, $(x,y)=(1,-1)$

La soluzione del sistema è stata condotta per via ALGEBRICA.
Si può dare un'interpretazione geometrica di quanto fatto.
L'insieme $\mathcal{A}$ delle soluzioni della 1ª equazione $x(y^2-x)=0$ è rappresentato nel piano cartesiano xOy dall'UNIONE della retta di equazione $x=0$ (cioè l'asse y) e della parabola avente asse = asse x: $y^2-x=0$.
L'insieme $\mathcal{B}$ delle soluz. della 2ª eq. $y(x^2-1)=0$ è invece rappresentato dall'unione dell'asse x e delle due rette parallele all'asse y di equazioni $x=1$, $x=-1$



I punti dell'intersezione $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ sono evidenziati in figura.

Errori da non fare

1) considerare equivalente al sistema dato l'unione delle soluzioni dei soli due sistemi $\begin{cases} \boxed{A1}=0 \\ \boxed{B1}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \boxed{A2}=0 \\ \boxed{B2}=0 \end{cases}$
Qui il risultato tornava per puro caso

2) Associare a sistema, invece di equazioni provenienti rispettivamente dalla 1ª e dalla seconda eq. date, dalla stessa equazione:
$\begin{cases} \boxed{A1}=0 \\ \boxed{A2}=0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} \boxed{B1}=0 \\ \boxed{B2}=0 \end{cases}$
Non si devono intersecare bensì unire gli insiemi soluzione delle sottoequazioni di una stessa equazione.
Detto in altro modo, $\boxed{A1}\cdot\boxed{A2}=0$ è equivalente a
$\boxed{A1}=0$ OPPURE $\boxed{A2}=0$
non a: $\boxed{A1}=0$ E $\boxed{A2}=0$

3) Dimenticare di "fare la prova", cioè, trovate le "soluzioni" presunte tali, verificare che sostituendo al posto di x e y nelle due equazioni di partenza ciascuna delle coppie ordinate trovate risultino vere entrambe le uguaglianze.

Nel sistema considerato, la cattiva associazione di equazioni

$\begin{cases} \boxed{B1}=0 \\ \boxed{B2}=0 \end{cases}$ portava come presunte soluzioni $(1,0)$, $(-1,0)$: ma sostituendo

- $(1,0)$ nella 1ª equazione si ha $1(0-1)=0$: FALSO
- $(-1,0)$ " " si ha $-1(0+1)=0$: FALSO

$\Longrightarrow$ nessuna delle due è soluzione $\Downarrow$ ho fatto un errore

4) dividere un'equazione per un fattore senza
   - capire che in questo modo in tutto il seguito si dovrà supporre che quel fattore sia $\neq 0$
   - chiedersi se l'annullarsi di quel fattore dia luogo a soluzioni.

Nel sistema considerato

$\begin{cases} xy^2-x^2=0 \\ x^2y-y=0 \end{cases}$ qualcuno ha detto: divido la prima equazione per x

$\begin{cases} y^2-x=0 \\ x^2y-y=0 \end{cases}$ e sostituisco $x=y^2$ nella 2ª eq. $\begin{cases} x=y^2 \\ y^5-y=0 \end{cases}$

Ora $y^5-y=y(y^2+1)(y^2-1)$ e quindi la 2ª eq. ha soluz. $y=0, y=1, y=-1$ e, sostituendo nella prima, le soluzioni del sistema sono $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$.

Le soluzioni sono giuste ma con un doppio errore : non aver osservato che per dividere per x suppongo $x\neq 0$ e non scartare, di conseguenza, la soluzione $(0,0)$, in cui - appunto - si ha $x=0$

5) errori di "riconoscimento della forma".
In particolare è frequente la confusione (o la distratta lettura) dei due elementi neutri 0, 1.

ES. $y(x^2-1)=0 \underset{???}{\Rightarrow} y=\frac{1}{x^2-1}$ come se uno avesse letto $y(x^2-1)=1$,

oppure $(x-2)(x-4)=1 \underset{???}{\Longrightarrow}$ $x-2=1$ oppure $x-4=1$ Come se uno avesse letto $(x-2)(x-4)=0$ e scomposto in $x-2=0$ oppure $x-4=0$

6) Pesantezze inutili: cercare sempre di esplicitare y in funzione di x a costo di introdurre radicali (in realtà le incognite, se non ordinate, hanno lo stesso "peso" : siamo noi che dobbiamo decidere quale è più comodo esplicitare); cercare sempre di risolvere la 1ª equazione per prima (anche in questo caso, visto che posso scambiare l'ordine delle equazioni, non è necessario e spesso è più semplice cominciare dalla 2ª)

È vero i numeri razionali sono in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali (cioè, come si suol dire, hanno la stessa CARDINALITÀ)?

SI.

Vediamolo per i razionali positivi (per gli altri basterà elencare i numeri nello stesso ordine, inserendo dopo ogni numero razionale positivo il suo opposto)

Rappresentiamo ogni numero razionale come FRAZIONE RIDOTTA AI MINIMI TERMINI e li classifichiamo in base al numero che si ottiene sommando numeratore e denominatore (= ALTEZZA del numero).

Ciascuna delle classi (o sottoinsiemi) così ottenuta è formata di un numero finito di numeri razionali che si possono ordinare in ordine crescente

Altezza	1	2	3		4		5				6		
Num. Raz	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{1}$	ecc.
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
NATURALI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	

l'aver fornito un modo di "elencare" tutti i possibili razionali garantisce di avere una corrispondenza biunivoca con i numeri naturali.

Proprietà dei numeri razionali (e anche dei reali)

- Perché denoto il reciproco di $a \in \mathbb{Q}$ con a^{-1}?
  Perché voglio che continuino a valere le proprietà delle potenze (in particolare $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$).
  Infatti se rileggo $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ come $a^1 \cdot a^c = a^0$ trovo $a^{1+c} = a^0$ e quindi $1+c=0$ cioè $c=-1$

- Proprietà di annullamento: $\boxed{\forall b \in \mathbb{Q} \text{ si ha } 0 \cdot b = 0}$
  Infatti
  $$\begin{aligned} (a+0)\cdot b &= ab + 0\cdot b \\ \| \quad & \quad \| \\ a \cdot b &= a\cdot b + 0\cdot b \end{aligned}$$
  e sottraendo a entrambi i membri ab
  $$0 = 0 \cdot b$$

• Legge di annullamento del prodotto

se $ab = 0$ e $a \neq 0$ allora $b = 0$

Dim.

Se $a \neq 0$ esiste a^{-1}: moltiplico per a^{-1} l'uguaglianza $ab=0$;

$a^{-1}(ab) = a^{-1}0$ per la propr. associativa:

$(a^{-1}a)b = a^{-1}0$ per def. di reciproco:

$1 \cdot b = a^{-1}0$ per def. di unità:

$b = a^{-1}0$ per la proprietà di annullamento $a^{-1} \cdot 0 = 0 \Rightarrow$

$b = 0$

E' la legge che ci ha permesso di risolvere le equazioni nel 1° sistema che abbiamo visto.

ORDINAMENTO dei numeri razionali (e altri ordinamenti)

- Come stabilisco chi è più grande tra $a = \frac{2^7}{3^4}$ e $b = \frac{3}{2}$?

Visto che i denominatori sono > 0 posso ricondurre la disuguaglianza $a \gtrless b$ a

$$2^7 \cdot 2 \gtrless 3^4 \cdot 3 \iff 2^8 \gtrless 3^5 \iff 256 \gtrless 243$$

Dato che $256 > 243$, risalendo per le frecce di equivalenza trovo che $\frac{2^7}{3^4} > \frac{3}{2}$

- E se invece ho $a = \frac{2^7}{-3^4}$ e $b = -\frac{3}{2}$?

Attenzione: i denominatori non sono entrambi positivi. Quindi prima riscrivo

$$a = -\frac{2^7}{3^4}$$

e opero come sopra .... arrivo a $-256 < -243$ e ricavo

$-\frac{2^7}{3^4} < -\frac{3}{2}$ (come si sarebbe potuto dire conoscendo la regola sull'inversione del verso della disug. che vedremo dopo).

Qui il segno nel denominatore era ben visibile.

Attenzione quando il denominatore è un'espressione che può assumere segno diverso al variare delle lettere variabili in essa contenute. Ne vedremo un esempio subito dopo (pg7)

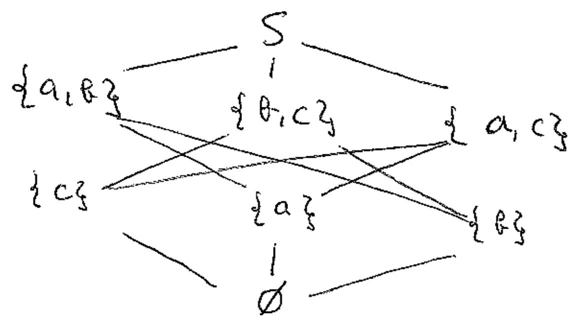
• L'ordinamento dei numeri razionali è totale, nel senso che dati $a, b \in \mathbb{Q}$ si realizza sempre 1 e 1 sola di queste eventualità:

$$a < b \quad \text{oppure} \quad a = b \quad \text{oppure} \quad a > b.$$

Ci sono ordinamenti non totali ?

Sì, ad esempio l'ordinamento per inclusione dei sottoinsiemi di un insieme.

Prendiamo un esempio semplice: $S = \{a, b, c\}$, i suoi sottoinsiemi: S, $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{a,c\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\emptyset$ possono essere ordinati come segue (la gerarchia è "chi è più in alto è più grande" se collegato con un tratto).



Ovviamente $\{a\}$ e $\{b,c\}$ non sono confrontabili (nessuno dei due è contenuto nell'altro); similmente non lo sono $\{a,b\}$ e $\{b,c\}$ oppure $\{a\}$ e $\{b\}$ ecc.

Lo schema fornito sopra (in cui gli elementi in relazione sono congiunti da tratti) mostra ovviamente che i sottoinsiemi non possono essere allineati in un'unica catena (rispettosa della gerarchia: cioè quando si inizia a scendere non si può risalire) e questa è l'immagine grafica di un ordinamento non totale.

• Proprietà di compatibilità dell'ordinamento con le operazioni e loro conseguenze

1) da: $\boxed{\forall a, b \in \mathbb{Q} \text{ con } a \leq b} \text{ e } \forall c \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + c \leq b + c$

posso far discendere (posto $c = -a$)

$$a - a \leq b - a \qquad \text{cioè} \quad 0 \leq b - a$$

e (posto $c = -b$)

$$0 - b \leq b - a - b \qquad \text{cioè} \quad \boxed{-b \leq -a}$$

Regola di inversione del verso della disuguaglianza allorché si cambia il segno dei due membri!

2) da : $\boxed{\forall a,b \in \mathbb{Q} \text{ con } a \le b}$ e $\forall c \ge 0 \Rightarrow ac \le bc$

segue che se invece prendo $c<0$ si ha

- per le proprietà 1) : $-c>0$
- " 2) : $a(-c) \le b(-c)$
- per le proprietà legate alla distributività $a(-c)=-ac$ ecc. e quindi:

$$-ac \le -bc$$

- per la proprietà 1 $\boxed{ac \ge bc}$

Regola dell'inversione del verso della disuguaglianza quando moltiplico per un numero negativo.

CONSEGUENZE PRATICHE nella soluzione di disequazioni

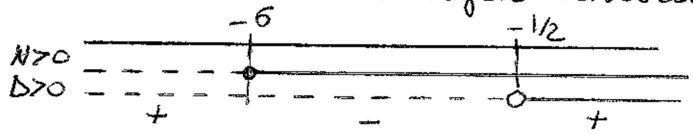
Risolvere $\dfrac{x-5}{2x+1} \ge 1$

Se moltiplico per $2x+1$ entrambi i membri senza distinguere i casi $2x+1>0$ e $2x+1<0$ introduco un errore !!

METODO DI SICUREZZA

$$\frac{x-5}{2x+1}-1 \ge 0 \iff \frac{x-5-2x-1}{2x+1} \ge 0 \iff \frac{-x-6}{2x+1} \ge 0 \iff \frac{x+6}{2x+1} \le 0$$

ciò succede se Num. e Den. hanno segno discorde



(*)

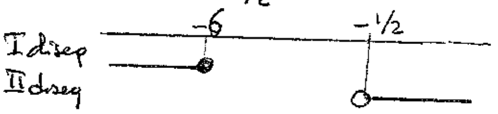
L'insieme soluzione è l'insieme degli x tali che $-6 \le x < -\frac{1}{2}$

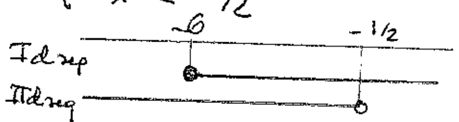
METODO "SPORTIVO"

moltiplico entrambi i membri per $2x+1$ tenendo conto del suo segno, questo origina due sistemi che seguiamo in parallelo a dx e sx; l'insieme soluzione della disequazione è l'unione dell'insieme delle soluzioni dei 2 sistemi

$$\begin{cases} x-5 \ge 2x+1 \\ 2x+1>0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x-5 \le 2x+1 \\ 2x+1<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le -6 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \ge 6 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$





(**)

le due diseq. non hanno sol. in comune: $\emptyset$

soluzioni comuni alle 2 diseq $-6 \le x < -\frac{1}{2}$

Notare il differente uso del grafico (*) e dei grafici (**): in questi non ci sono i segni — proprio perché non interessa sapere se nessuna delle 2 diseq. ha soluzione.

Altre proprietà connesse con l'ordinamento

- Se $0<a<b$ allora $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

  infatti: moltiplicando per $\frac{1}{a}$ che è >0 la diseg. $a<b$ ho

  $$a \cdot \frac{1}{a} < b \cdot \frac{1}{a} \qquad \text{cioè } 1 < b \cdot \frac{1}{a}$$

  moltiplicando per $\frac{1}{b}$ che è >0 l'ultima disug:

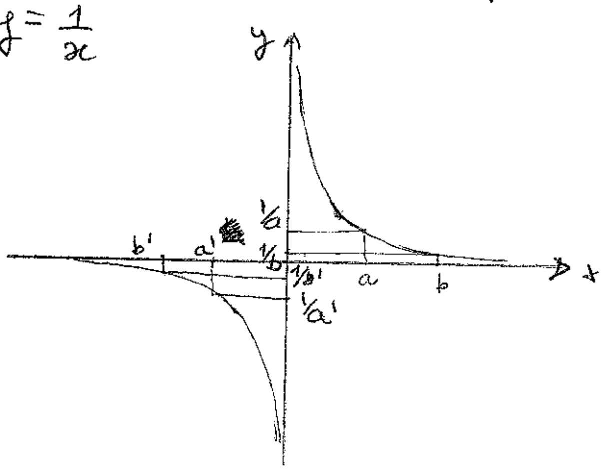
  $$1 \cdot \frac{1}{b} < b \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \qquad \text{cioè } \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

- Se $b<a<0$ ancora $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$

  Basta osservare che $0<-a<-b$ e quindi $\frac{1}{-a} > \frac{1}{-b}$, da cui cambiando il segno....

- Se $a<0<b$ invece $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$

Il tutto può essere ricordato facilmente usando il grafico di $y = \frac{1}{x}$



Esercizi

1) $a^2 \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{Q}$

   ovvio$^{(*)}$ se $a \geq 0$. Se $a<0$ moltiplicare la disug. per il numero $a<0$ ha l'effetto di rovesciare la disug.: $a \cdot a > 0$.

   (*) $a^2 = a \cdot a \geq a \cdot 0 = 0$

2) $\forall a,b \in \mathbb{Q}$ si ha $2ab \leq a^2+b^2$

   Infatti $(a-b)^2 \geq 0$ ed è $=0 \iff a-b=0$ cioè $a=b$

   sviluppando: $a^2+b^2-2ab \geq 0$

   cioè $a^2+b^2 \geq 2ab$.

Rappresentazione decimale dei numeri razionali

1) ogni numero razionale si può rappresentare con una frazione $\frac{p}{q}$. A partire da questa si ottiene una rappresentazione decimale operando la divisione "con virgola" di p per q.

Se q è prodotto di potenze di 2 per potenze di 5 dopo un certo numero di passi la divisione dà resto zero: Es

$$q = 2^3 \cdot 5 \ , \ p = 17 \quad \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{17}{2^3 \cdot 5} = \frac{17 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{17 \cdot 25}{10^3} = \frac{425}{10^3} = 0,425$$

(si è cercato di spiegare "perché" si arriva a resto zero: di fatto la frazione data è equivalente a una con denominatore potenza di 10)

In tutti gli altri casi la divisione dà luogo a un numero decimale periodico il cui periodo ha certamente lunghezza $\leq q-1$ (poiché nella divisione si possono presentare al più $q-1$ resti diversi da 0). Ad es.:

$1 : 7 = 0,142857$

10
30
20
60
40
50
1 .....

cioè $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$

Quindi a ogni numero razionale corrisponde 1 numero decimale limitato oppure limitato periodico.

In realtà per dire che ne corrisponde 1 solo dobbiamo operare delle identificazioni (ovvie) ad es. tra $0,\overline{9}$ e 1 e in generale tra un numero con cifre $B, a_1 a_2 \dots a_n \overline{9}$ e $B, a_1 a_2 \dots (a_n+1)$.

Il perché nasce dal processo inverso:

2a) A ogni decimale periodico posso associare un numero razionale.

Ad es. $x = 0,\overline{23}$ si può scrivere come $x = \frac{23}{99}$

Infatti $100x = 23,\overline{23} \Longrightarrow 100x - x = 23 \Longrightarrow x = \frac{23}{99}$

Similmente $4,\overline{23} = 4 + 0,\overline{23} = 4 + \frac{23}{99} = \frac{4 \cdot 99 + 23}{99} = \frac{419}{99}$

e regole simili per i periodici misti

2b) A ogni decimale finito posso associare un numero razionale: ad es. $2,57 = \frac{257}{100}$

Quindi a meno dell'identificazione proposta in precedenza (e legata al fatto che, ad es., $0,\bar{9} = \frac{9}{9} = 1$) posso dire che c'è corrispondenza biunivoca (posso identificare) tra numeri razionali e numeri decimali limitati o illimitati periodici.

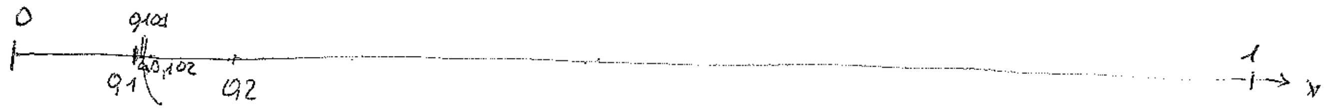
<u>E gli altri chi sono?</u>

Il numero decimale

$$0,101001000100001000001\ldots$$

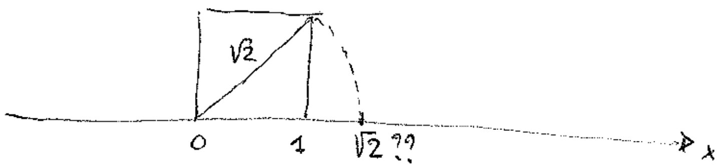
in cui ogni nuovo 1 è seguito da tanti 0 quanti sono gli <u>1</u> scritti in precedenza è un decimale, i cui elementi so descrivere benissimo (non come succede per le cifre di $\sqrt{2}$ o di π) ma non è periodico e quindi non è razionale.

D'altra parte posso rappresentarlo con la precisione che preferisco sulla retta



ecc. starò dentro quell'intervallo

Lo stesso discorso vale per $\sqrt{2}$ pensata come misura della diagonale del quadrato di lato 1



<u>Bisogna passare a un sistema numerico più ampio.</u>

Numeri reali:

insieme di tutti i numeri decimali limitati e non, periodici e non.

Operazioni (e ordinamento) definiti opportunamente in modo che

- se restringo la considerazione ai decimali che rappresentano i razionali il risultato sia quello che mi aspetto nei razionali;
- in particolare valgono tutte le proprietà algebriche e di ordinamento già viste per i razionali.

Attenzione: definire somma e prodotto di allineamenti decimali non è banale, a causa dei "riporti". Questo è un problema quando si lavora con approssimazioni_

- Che cos'hanno in più i numeri reali? LA COMPLETEZZA.

Ts I numeri razionali non hanno la proprietà di completezza, cioè non è vero che se A e B sono due sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ tali che $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha $a \leq b$ allora esiste un $c \in \mathbb{Q}$ tale che $\forall a \in A, \forall b \in B$: $a \leq c \leq b$.

Controesempio $A = \{a \in \mathbb{Q}, a > 0 \mid a^2 < 2\}$

$B = \{b \in \mathbb{Q}, b > 0 \mid b^2 < 2\}$

Sono separati: infatti se per un $a \in A$ e un $b \in B$ fosse

(*) $a > b \quad (>0)$

allora: $a \cdot a > a \cdot b$

$a \cdot b > b \cdot b$

e quindi $a^2 > ab > b^2$. Ma per ipotesi $a^2 < 2 < b^2$:

quindi (*) non può verificarsi mai.

Dunque è vero che $\forall a \in A, \forall b \in B$ si ha $a \leq b$.
(e vale addirittura il $<$ stretto)

D'altra parte in $\mathbb{Q}$ non c'è un elemento c che sia separatore dei due insiemi.

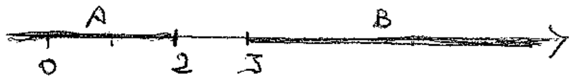
L'elemento esiste certamente in $\mathbb{R}$ (è $\sqrt{2}$).

Ma, visto che gli elementi di A e quelli di B possono essere presi in modo da avere tra loro (e da $\sqrt{2}$) distanza piccola quanto si vuole, non si riesce a trovare un separatore $c \in \mathbb{Q}$.
Se ci fosse, o sarebbe $c < \sqrt{2}$, ma allora $c^2 < 2$ cioè $c \in A$ e si riesce comunque a trovare un numero $a \in \mathbb{Q}$ con $c < a < \sqrt{2}$ cioè un elemento $a \in A$ non minore di c; oppure sarebbe $c > \sqrt{2}$ e con lo stesso ragionamento si vede che $c \in B$ ma esiste un $b \in \mathbb{Q}$ t.c. $\sqrt{2} < b < c$ e quindi c non è minore di tutti gli elementi di B (in sostanza si sfrutta la densità di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R}$)

- Perché nella definizione di completezza si dice "dati due sottoinsiemi A e B separati esiste ALMENO UN elemento separatore"?

Due insiemi separati possono in realtà assumere forme molto diverse da quella vista nell'esempio precedente. Ad es. sono separati

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\} \quad e \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$$



e in questo caso di elementi separatori ce ne sono infiniti (tutti i $c \in [2,3]$)

- Attenzione: sono separati anche i due insiemi

$$A = \{1^{2k},\ k \in \mathbb{Z}\} \quad e \quad B = \{1^{2k+1},\ k \in \mathbb{Z}\}$$

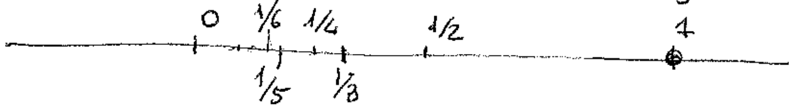
anche se tutti gli elementi di A sono costituiti dal solo 1 e così pure tutti quelli di B. Ma è certamente vero che $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ risulta $a \le b$. In questo caso l'elemento separatore è ancora $c = 1$.

Maggioranti, minoranti, inf e sup

- Consideriamo $E = (1, 10) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 10\}$
Cerchiamo un suo MINORANTE, cioè un $l \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in E$ risulti $l \le x$.
E' evidente che possiamo prendere $l = 1$; però anche ogni altro numero $l < 1$ (ad es. $l = 0$) è un minorante, infatti $l < 1 < x \quad \forall x \in E$, per definizione di $E = (0,1)$

- Consideriamo $E = [1, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x < 3\}$
Certamente 1 è un minorante di E e 3 è un maggiorante di E.
Inoltre 1 è $\operatorname{Inf} E$ poiché se y è un altro minorante di E (cioè $y \le x \ \forall x \in E$) in particolare deve essere $y \le 1$, in quanto 1 appartiene a E. Inoltre $1 = \min E$, poiché $\in E$.
$\operatorname{Sup} E = 3$ poiché 3 è un maggiorante di E e se (per ASSURDO) $\exists y \in \mathbb{R}$ fosse un altro maggiorante di E e $y < 3$, il numero $\frac{y+3}{2}$ sarebbe < 3 (e quindi $\in E$) ma sarebbe $> y$: il che non può essere se $y > x$, $\forall x \in E$.

• Consideriamo $E = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ \frac{1}{1} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$.



È inferiormente limitato, poiché questi numeri sono tutti positivi, cioè $\forall \frac{1}{n} \in E$ si ha $0 < \frac{1}{n}$.
È superiormente limitato, poiché $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $\frac{1}{n} \leq 1$.
Non solo 0 è un minorante di E e 1 un maggiorante di E ma:

$$\sup E = 1 = \max E$$ (stesso ragionamento visto prima per $1 = \inf E = \min E$)

e

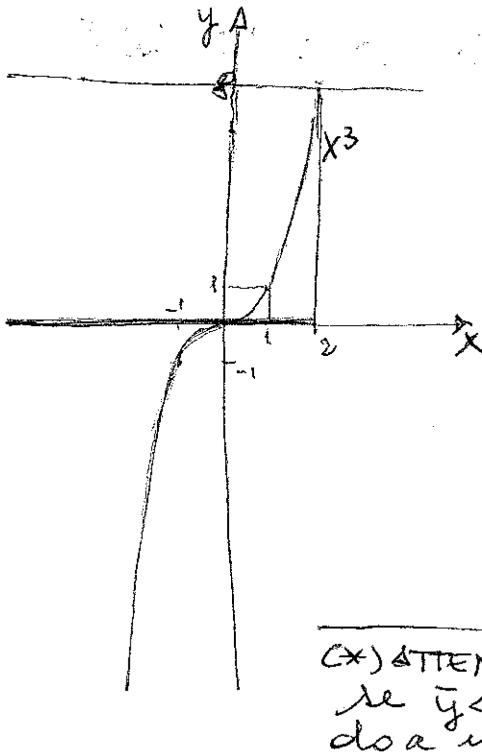
$$\inf E = 0$$

Infatti se $l \geq 0$ è un minorante di E o $l = 0$ oppure esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $0 < \frac{1}{n} < l$: basta prendere $n > \frac{1}{l}$.

• Consideriamo $E = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 \leq 8 \}$

È superiormente limitato poiché $x^3 - 8 \leq 0 \iff (x-2)(x^2+2x+4) \leq 0$ e, visto che il trinomio $\underbrace{x^2+2x+4}_{=(x+1)^2+3}$ è > 0 $\forall x \in \mathbb{R}$, questo significa $x \leq 2$, $\forall x \in E$. Dunque $2 = \sup E = \max E$.

Invece non è inferiormente limitato (e scriveremo, convenzionalmente: $\inf E = -\infty$) poiché non ha minoranti



Infatti se esistesse un $\bar{y} \in \mathbb{R}$ t.c. $\bar{y} \leq x$ $\forall x \in E$, allora $\bar{y}^3 \overset{(*)}{\leq} x^3$ $\forall x \in E$, ma nella diseq. che descrive l'insieme non c'è nessuna delimitazione "a sinistra": $(\bar{y}-1)^3 \leq 8$ pure essendo $\bar{y} - 1 < \bar{y}$

La cosa si vede graficamente osservando che c'è un'intera semiretta, contenuta nell'asse x, trasformata dalla funzione $f(x) = x^3$ in punti di ordinata ≤ 8 (cioè sotto la retta $y = 8$)

(*) ATTENZIONE: se $\bar{y} > 0$ è ovvio; se $\bar{y} < 0 < x$ anche, se $\bar{y} < x < 0$ bisogna osservare che $\bar{y}^2 \geq x^2 > 0$ e tornando a moltiplicare per quantità < 0 si torna a $\bar{y}^3 \leq x^3 < 0$.

Due parole sul concetto di <u>valore assoluto</u> (o modulo) di un numero (reale o razionale)

Def. Sia $a \in \mathbb{R}$;

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

OSS1

lunghezza del segmento: a

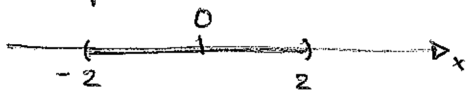
lunghezza del segmento: $-a$

Cioè $|a|$ misura in ogni caso la <u>distanza dall'origine</u> del punto di ascissa a.

OSS2 Trattandosi di distanza (e per definizione): $|a| \geq 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$.

- Chi è l'insieme $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2\}$?

GRAFICAMENTE: è l'insieme dei punti dell'asse x che hanno da 0 distanza < 2 e quindi è l'intervallo aperto $(-2, 2)$



ALGEBRICAMENTE

$|x| < 2 \xrightarrow{\text{CASO 1}}$ se $x \geq 0$ significa $x < 2 \Rightarrow \{x \mid 0 \leq x < 2\}$

$\phantom{|x| < 2} \xrightarrow{\text{CASO 2}}$ se $x < 0$ " $-x < 2 \Rightarrow \{x \mid -2 < x < 0\}$

ora devo unire i due casi:

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ oppure } 0 \leq x < 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\} = (-2, 2)$.

- Chi è l'insieme $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 5\}$?

.... $E = (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$

- Chi è l'insieme $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| < 4\}$?

Sono i punti dell'asse x che hanno da **3** distanza < 4
O, algebricamente, gli x tali che

$$-4 < x - 3 < 4 \quad \text{cioè } -1 < x < 7$$

- Chi è l'insieme $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| < 4\}$?

Sono i punti dell'asse x che hanno da **-2** distanza < 4.
ATTENZIONE AI SEGNI DELLE ASCISSE DEI PUNTI DA CUI SI CALCOLA LA DIST.

- Quali sono le soluzioni della diseq. $|x| < -1$? $\emptyset$
E quelle della diseq. $|x| \leq 0$? $x = 0$.

Potenze con esponente razionale

Si parte dall'osservare che interpretando $\sqrt[n]{a}$ come $a^{1/n}$ tutte le proprietà dei radicali si possono interpretare (e ricordare) come proprietà delle potenze.
Si definisce poi $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a^m})$

MA, ATTENZIONE, qui ci sono insidie!

1) $\sqrt[4]{a^2}$ è definita qualunque sia $a \in \mathbb{R}$ ($\gtrless 0$)
ma $(\sqrt[4]{a})^2$ è definita solo se $a \geq 0$

2) se rappresento l'esponente $\frac{1}{3}$ come $\frac{2}{6}$ passo da un'espressione sempre definita come $\sqrt[3]{a}$
(se $a \geq 0$ $\sqrt[3]{a}$ è il radicale aritmetico, cioè la soluzione >0 dell'eq. $x^3=a$ sempre esistente per la completezza,
se $a<0$ $\sqrt[3]{a}$ è l'opposto del radicale aritmetico $\sqrt[3]{|a|}$)
ad un'espressione che può essere definita solo per $a \geq 0$:
$(\sqrt[6]{a})^2$.

3) se rappresento $\frac{1}{3}$ come $\frac{-1}{-3}$ passo a una espressione che è definita solo per $a \neq 0$: $(a^{-1})^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{1/a}}$

Per questi motivi quando si parla di potenze con esponente razionale (e poi: reale) si chiede che <u>la base</u> a <u>sia</u> POSITIVA (strettamente)

Potenze con esponente reale

Più che dare una vera definizione, vogliamo cercare di capire che cosa sono.
Prendiamo il numero decimale illimitato non periodico:

$$a = 0{,}101001000100001000001\ldots\ldots$$

Che cosa intendo scrivendo 2^a?

La scrittura decimale suggerisce approssimazioni per difetto e per eccesso del numero a

$0 < a < 1$
$0.1 < a < 0.2$
$0.10 < a < 0.11$
$0.101 < a < 0.102$
.....

che delimitano intervalli in cui cade a di ampiezza via via più piccola: 1, 0.1, 0.01, 0.001

Posso costruire i due insiemi

$A = \{2^0, 2^{0.1}, 2^{0.10}, 2^{0.101}, \ldots\}$
$B = \{2^1, 2^{0.2}, 2^{0.11}, 2^{0.102}, \ldots\}$

di potenze con esponenti razionali (sono decimali limitati!)
Osservo che ogni elemento di A non è minore del precedente.
Ad es. $2^{0.10} = 2^{0.1}$, ma $2^{0.101} > 2^{0.10}$.
Questa ultima affermazione si può vedere così:

$2^{0.101} = 2^{0.10} \cdot 2^{0.001}$ (proprietà delle potenze con esponente razion.)

e $2^{0.001}$ è > 1 (*): quindi $2^{0.101} = 2^{0.10} \cdot 2^{0.001} > 2^{0.10} \cdot 1 = 2^{0.10}$.
Similmente ogni elemento di B non è maggiore del precedente.
Non solo: posso – comunque piccolo fissi un numero reale $\varepsilon > 0$ – trovare un elemento $x \in A$ e un elemento $y \in B$ tali che $y - x < \varepsilon$. Ciò permette di dire che l'elemento separatore di A e B <u>è unico</u>: definisco $2^a = c$.

(*) $2^{0.001} > 1$: infatti <u>se fosse</u> $x = 2^{0.001} = 2^{1/1000} \leq 1$ (trattandosi di numeri > 0) avrei:

$$x^{1000} = x^{999} \cdot x \underset{\substack{\uparrow \\ x \leq 1}}{\leq} x^{999} = x^{998} \cdot x \leq x^{998} \leq \ldots \leq x^2 = x \cdot x \leq x \leq 1$$

ma per ipotesi $x^{1000} = (2^{1/1000})^{1000} = 2$ e quindi non può essere $x^{1000} \leq 1$. ASSURDO.

Alcune osservazioni a margine sulle proprietà delle potenze

- Attenzione all'uso delle proprietà $(ab)^c = a^c b^c$: devo poter essere sicuro che $a>0$ e $b>0$.

Esempio: è vero che posso rappresentare $\sqrt{(x-1)x}$ come $((x-1)x)^{1/2}$ MA NON È VERO CHE $\sqrt{(x-1)x} = (x-1)^{1/2}x^{1/2}$.

Infatti: $\sqrt{(x-1)x}$ è definita se e solo se $(x-1)x \geq 0$ cioè per $\boxed{x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)}$;

invece: $(x-1)^{1/2}$ è definita se e solo se $x-1 \geq 0$ cioè per $x \in [1, +\infty)$

$x^{1/2}$ " " $x \geq 0$ " $x \in [0, +\infty)$

e quindi il loro prodotto è definito se e solo se lo sono entrambe, cioè per $\boxed{x \in [1, +\infty)}$: perdiamo una parte dell'insieme di definizione.

Se per qualche motivo è utile spezzare devo scrivere

$$\sqrt{(x-1)x} = \begin{cases} \text{se } x \in [1, +\infty): & (x-1)^{1/2} x^{1/2} \\ \text{se } x \in (-\infty, 0]: & (1-x)^{1/2}(-x)^{1/2} \end{cases}$$

- La proprietà $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ $(a>0)$ contiene al suo interno anche la proprietà $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$.

Infatti $\frac{1}{a^c} = a^{-c}$, come è facile rilevare osservando che $a^c \cdot a^{-c} = a^{c+(-c)} = a^0 = 1$ e quindi a^{-c} è il reciproco di a^c.

Quindi $\frac{a^b}{a^c} = a^b \cdot \frac{1}{a^c} = a^b \cdot a^{-c} = a^{b-c}$ ($-c$ è un numero reale come gli altri!)

- Attenzione al buon uso della proprietà $(a^b)^c = a^{bc}$.
C'è scritto $(a^b)^c$ con le parentesi, non a^{b^c}.
Ad es. $(2^2)^3 = 2^6 = 64$; invece $2^{2^3} = 2^8 = 512$.

- Verifichiamo che dato per buono che $\boxed{\text{se } a>1 \text{ e } c>0 \text{ allora } a^c > 1}$ (cosa che abbiamo verificato per $2^{1/1000}$) si possono dedurre le seguenti implicazioni:

1) $\boxed{\text{se } a>1 \text{ e } c<0 \text{ allora } (0<)a^c<1.}$

infatti $c=-|c|$ e quindi da $a^{|c|}>1$ ricavo $a^{-|c|}<1^{-1}=1$, cioè $a^c<1$, utilizzando la proprietà sull'ordinamento:

$$(*) \quad 0<a<b \quad \Rightarrow \quad 1/a > 1/b$$

2) $\boxed{\text{se } 0<a<1 \text{ e } c>0 \text{ allora } (0<)a^c<1.}$

infatti, per la stessa proprietà vista sopra $(*)$: $\frac{1}{a}>\frac{1}{1}=1$.
Quindi

$$\left(\frac{1}{a}\right)^c>1$$

Ma $\left(\frac{1}{a}\right)^c=\frac{1}{a^c}$ e da $\frac{1}{a^c}>1$, applicando $(*)$, ricavo $a^c<1$

3) $\boxed{\text{se } 0<a<1 \text{ e } c<0 \text{ allora } a^c>1}$

infatti $c=-|c|$ e quindi $a^c=a^{-|c|}=\frac{1}{a^{|c|}}=\left(\frac{1}{a}\right)^{|c|}>1$
poiché $1/a>1$ e $|c|>0$.

<u>Alcune equazioni riguardanti le potenze che siamo in grado di risolvere arrivati a questo punto.</u>

- $x^2=10$ in $\mathbb{R}$ ha due soluzioni: il radicale aritmetico $\sqrt{10}$ e il suo opposto $-\sqrt{10}$ (poiché l'esponente è un intero pari)
- $x^4+1=0$ in $\mathbb{R}$ non ha soluzioni poiché $1+x^4\geq 1+0=1>0$.
- $x^3+7=0$ in $\mathbb{R}$ ha 1 soluzione, che è <u>l'opposto del radicale aritmetico</u> $\sqrt[3]{7}$.
  Infatti $\sqrt[3]{7}$ è – per definizione – la soluzione di $t^3=7$; ovviamente $(-\sqrt[3]{7})^3=(-1)^3(\sqrt[3]{7})^3=-1\cdot 7=-7$ e quindi $-\sqrt[3]{7}$ è soluzione di $x^3=-7$.
- $x^{2/3}=5$ in $\mathbb{R}$ ha la sola soluzione $x=5^{3/2}$
  Posso vederlo così
  $x^{2/3}=5 \iff (x^{2/3})^3=5^3$ cioè $\begin{cases} x^2=5^3 \\ x>0 \end{cases} \iff x=5^{3/2}$
  ATTENZIONE A RICORDARE CHE LA BASE x è >0 !!!
- $x^{\sqrt{2}}=4$ in $\mathbb{R}$ ha la sola soluzione $x=2^{\sqrt{2}}$
  Posso vederlo così
  $x^{\sqrt{2}}=4 \iff (x^{\sqrt{2}})^{1/\sqrt{2}}=4^{1/\sqrt{2}}$ cioè $x=4^{1/\sqrt{2}}$
  e $4^{1/\sqrt{2}}=(2^2)^{1/\sqrt{2}}=2^{2/\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}}$

Concludendo, se $c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e se $c \neq 0$:
l'equazione $x^c = b$ con $\boxed{b > 0}$ ha una e una sola soluzione $x > 0$ data da $x = b^{1/c}$ come si verifica usando le propr. delle potenze:

$$x^c = b \iff (x^c)^{1/c} = b^{1/c} \iff x = b^{1/c}$$

Nel caso particolare in cui $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

se $c \gtrless 0$ e c è pari: ci sono due soluzioni di segno opposto (cioè oltre a quella >0 garantita dall'affermazione precedente c'è anche l'opposta): $x = \pm b^{1/c}$

se $c \gtrless 0$ e c è dispari: c'è una sola soluzione ma ha soluzione anche $x^c = b$ con $b < 0$

$$x = \operatorname{sgn}(b) \cdot (|b|)^{1/c}$$

se $c \gtrless 0$ e c è pari: non ci sono soluzioni per $x^c = b$ se $b < 0$.

Attenzione: se $c < 0$ e $b = 0$ l'equazione $x^c = b$, cioè $x^c = 0$, non ha mai soluzione perché sarebbe come chiedere un $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{1}{x^{|c|}} = 0 \quad !$$

Quindi so risolvere $x^c = b$ (base incognita) ma non so ancora come risolvere

$$a^x = b \qquad \text{(esponente incognito).}$$

Esame dell'uguaglianza $a^x = b$

- se $a = 1$, $\boxed{1^x = 1}$ (osservare che per ogni razionale $\frac{m}{n}$ si ha $1^{m/n} = \sqrt[n]{1^m} = \sqrt[n]{1} = 1$ e che ogni potenza con esp. reale si approssima mediante insiemi di potenze razionali: $A = \{1, 1, 1, \dots\}$, $B = \{1, 1, 1, \dots\}$ che ammettono come elemento separatore 1).
  Quindi se $a = 1$ e $b = 1$: $a^x = b$ è un'identità (vale $\forall x \in \mathbb{R}$)
  se $a = 1$ e $b \neq 1$: $a^x = b$ è un'equazione impossibile
- se $b \leq 0$, $a^x = b$ è in ogni caso un'equazione impossibile poiché $a^x \geq 0$ (proprietà delle potenze)
- resta da esaminare $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ e $b \in (0, +\infty)$.

Concetto di logaritmo in base a di b

Se $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ e $b \in (0,+\infty)$ l'eq. $a^x = b$ ammette 1 e 1 sola soluzione reale che chiamo

logaritmo in base a di b e denoto $\log_a b$.

Quindi $\log_a b$ è l'esponente che devo dare ad a per ottenere b. Ne segue che PER DEFINIZIONE

$$\boxed{a^{\log_a(b)} = b} \quad e \quad \boxed{\log_a a^c = c}$$

Proprietà dei logaritmi.

Sono una conseguenza delle proprietà delle potenze.

1) $\boxed{\log_a 1 = 0}$ poiché $a^0 = 1$

2) $\boxed{\log_a(xy) = (\log_a x) + (\log_a y) \quad se \ x > 0 \ e \ y > 0}$

INFATTI

$$a^{(\log_a x) + (\log_a y)} \underset{PR.POT.}{=} a^{(\log_a x)} \cdot a^{(\log_a y)} \underset{DEF\,LOG}{=} x \cdot y$$

cioè $(\log_a x) + (\log_a y)$ è l'esponente che devo dare ad a per ottenere (xy) cioè $\log_a(xy)$.

3)

$$\log_a\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = \log_a(1) \underset{(1)}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \log_a y + \log_a\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\overset{(2)}{=} (\log_a y) + \log_a\left(\frac{1}{y}\right)$$

Quindi: $\boxed{\log_a(1/y) = -\log_a y}$.

4) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = (\log_a x) - (\log_a y)$ se $x > 0$ e $y > 0$

INFATTI $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = (\log_a x) + (-\log_a y)$.

5) $\boxed{\log_a x^c = c \log_a x}$ se $x > 0$ (x^c non ha senso altrove!)

INFATTI

$$a^{c \cdot \log_a x} = a^{(\log_a x)c} \underset{PR.POT}{=} \left(a^{(\log_a x)}\right)^c \underset{DEF\,LOG}{=} (x)^c$$

cioè $c\log_a x$ è l'esponente da dare ad a per ottenere x^c, cioè $\log_a x^c$.

6) $\boxed{(\log_a b)(\log_b x) = \log_a x}$ se $x > 0$ e $a, b \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

INFATTI:

$$a^{(\log_a b)(\log_b x)} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} = b^{\log_b x} = x$$

cioè $(\log_a b)(\log_b x)$ è l'esponente da dare ad a per ottenere x, cioè $\log_a x$.

7) In particolare $(\log_a x) \cdot (\log_x a) = 1$ se $a, x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ cioè

$$\boxed{\log_a x = \frac{1}{\log_x a}}$$

8) non confondere la (7) con questa proprietà:

$$\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x \qquad \text{se } x > 0 \quad e \quad a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

VALIDA POICHÉ $\left(\frac{1}{a}\right)^{-\log_a x} = \left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x.$

che consente di ricondurre i logaritmi con base $a \in (0,1)$ a logaritmi in base $\frac{1}{a} \in (1,+\infty)$ e quindi di studiare solo logaritmi con basi >1.

Equazioni - disequazioni logaritmiche

- $\frac{2^{2x}}{3^x} = 5$: osservo che $2^{2x} = (2^2)^x = 4^x$ e trasformo, usando le proprietà delle potenze:

$$\frac{2^{2x}}{3^x} = \frac{4^x}{3^x} = \left(\frac{4}{3}\right)^x$$

Devo quindi risolvere

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = 5 \iff x = \log_{4/3} 5.$$

- Qualche osservazione sul risultato: è vero che $\log_{4/3} 5 > 0$?

  Sì poiché la base $\frac{4}{3}$ è >1 e 5 è $> 1 = \left(\frac{4}{3}\right)^0$ e se $c > 0$, $\left(\frac{4}{3}\right)^c > \left(\frac{4}{3}\right)^0$ e viceversa (il viceversa sarà dimostrato usando le funzioni inverse).

  È vero che $\log_{4/3} 5 > 1$? sì poiché $5 > \frac{4}{3}$ e $\log_{4/3} x$ è (come vedremo) una funzione crescente.

- $\log_2 (x(x-1)) < 1$

  I.D. $x(x-1) > 0$: il logaritmo è definito per $x \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ e quindi le soluzioni vanno cercate in questo insieme.

  Essendo $2 > 1$, da $c < d$ segue $2^c < 2^d$ e viceversa (sempre tramite funz. inverse)

  Quindi la disug. equivale a

$$2^{\log_2 (x(x-1))} < 2^1 \qquad \text{con } x \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$$

$$\Updownarrow$$

$$x(x-1) < 2 \iff x^2 - x - 2 < 0 \iff -1 < x < 2$$

Le soluzioni di queste due disequazioni che appartengono all'insieme di definizione sono le x appartenenti all'intersezione dei due insiemi:

$$(-1,0) \cup (1,2)$$

Questo è l'insieme soluzione della disequazione data.