7 ottobre. Esercizi iniziali (1

$$3^{5x+8} > 9^{x+1} \qquad 9 = 3^2$$

$$3^{5x+8} > (3^2)^{x+1}$$

$$3^{5x+8} > 3^{2(x+1)}$$

applico $\log_3$ $\Updownarrow$

la base 3 delle 2 potenze è > 1

$$\boxed{c<d \Leftrightarrow 3^c < 3^d}$$

$$5x+8 > 2(x+1)$$

$$\Updownarrow$$

$$3x > -6$$

$$\Updownarrow$$

$$x > -2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+8} > \left(\frac{4}{9}\right)^{x+1}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+8} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+2}$$

la base $\frac{2}{3}$ è < 1

$$c<d \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^c > \left(\frac{2}{3}\right)^d$$

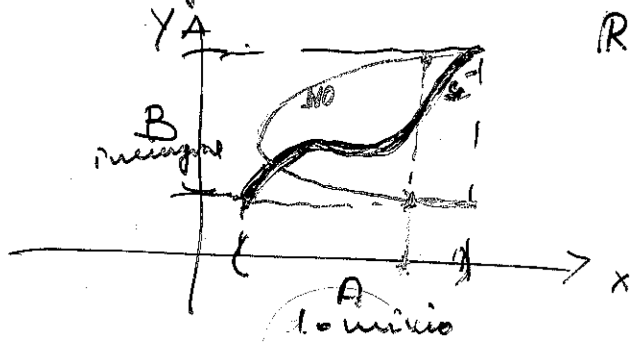
$\log_{2/3}$

$$5x+8 < 2x+2$$

(f, A, B) $\qquad f: A \to B$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad f: A \to \mathbb{R}$ (2

commenti sulle def. di funzione

Suppongo di rappresentare la variabile indip. nell'asse x e quella dipendente nell'asse y: dove cerco il dominio e dove cerco l'immagine?



$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

contenitore

Definizione:

$X \times Y$ è l'insieme delle coppie ordinate (x, y) con $x \in X$, $y \in Y$

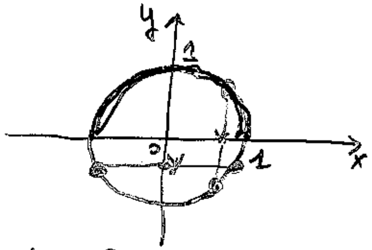
$$\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{x = y^2}$$

questa è una funzione se decido che la variabile indipendente è y e quella dip. è x

(3)

$x^2+y^2-1=0$ non può rappresentare una funzione né se prendo x come variab. indip. né se prendo y come variab. ind.



La legge

$x^2+y^2-1=0$ definisce IMPLICITAMENTE (*)

due funzioni (x variab. indip.)

$$[y^2 = 1-x^2] \Longrightarrow \quad y=\sqrt{1-x^2}$$

$$y=-\sqrt{1-x^2}$$

(*) è una legge che lega x a y ma non nella forma $y=f(x)$

anche

$x=y^2$ (variab. indip. x)

definisce implicitamente 2 funzioni

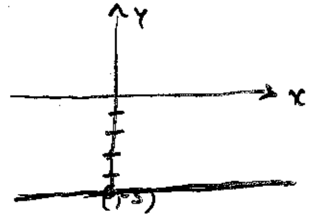
$$y=\sqrt{x}$$

$$y=-\sqrt{x}$$

Esempi sulle definizioni di dominio, immagine, grafico (4)

$\mathbb{R}$

$\{-5\}$

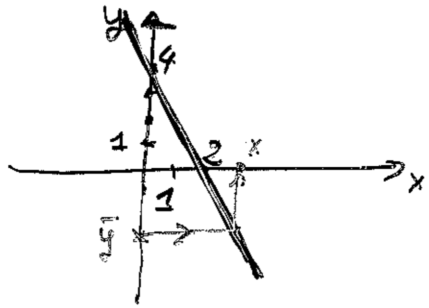


x	0	2
f(x)	4	0

$$y=4-2x$$

$Im(f)=\mathbb{R}$

$\{y\in\mathbb{R} \mid \exists x\in\mathbb{R} : 4-2x=y\}$



$\forall \bar{y}\in\mathbb{R} \ \exists x : 4-2x=\bar{y}$

$2x = 4-\bar{y}$

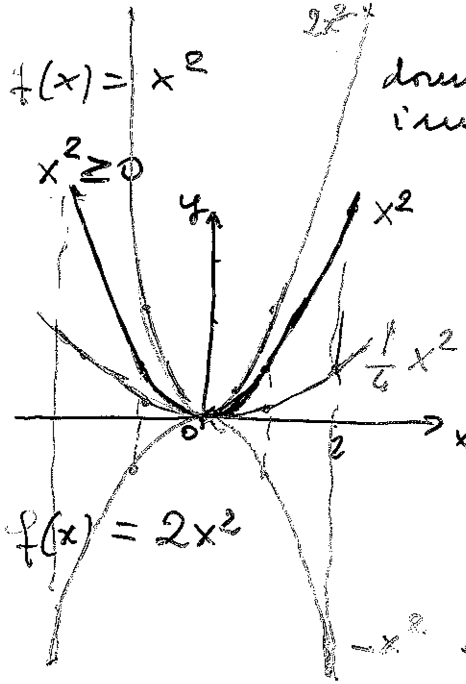
$x = \dfrac{4-\bar{y}}{2}$

$f(x)=x^2$

dominio $=\mathbb{R}$

immagine $=[0,+\infty)$

$x^2\geq 0$



x	0	1	-1	2	-2
f(x)	0	1	1	4	4

x	1/2
f(x)	1/4

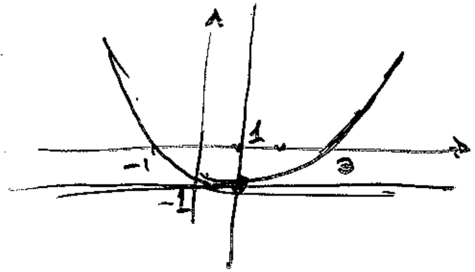
....

$f(x)=2x^2$

$-x^2 \leftarrow Im(-x^2)=(-\infty,0]$

$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3$ oppure $x = -1$



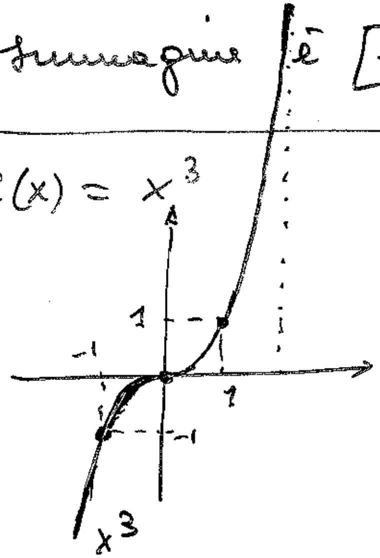
$x = 1$

$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

se $x = 1$ $\quad y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -1$

immagine è $[-1, +\infty)$

$f(x) = x^3$



dominio $\mathbb{R}$
immagine $\mathbb{R}$
$\bar{y} = x^3 \Longrightarrow x = \mathrm{sgn}\,\bar{y} \cdot \sqrt[3]{|\bar{y}|}$

x	0	1	-1	2	1/2
y	0	1	-1	8	1/8

x^2 : simmetria del grafico rispetto all'asse y

x^3 : simmetria del grafico rispetto all'origine

la stessa cosa succede rispettivamente
per x^{2k} con $k \in \mathbb{N}$ e
per x^{2k+1} "

Definizione : dico che $f: A \to B$ $(A, B \subset \mathbb{R})$ è pari se

$\forall x \in A$ si ha $f(x) = f(-x)$

.... è dispari se

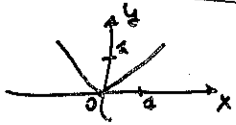
$\forall x \in A$ si ha $f(x) = -f(-x)$

Da qs. def. si capisce che per parlare di funz. pari (o dispari) nel dominio accanto a ogni elem. $a \in A$ deve esistere $-a$
$\Longrightarrow$ il dominio è simmetrico rispetto all'origine

---

Una funz dispari definita in $x=0$ deve avere in $x=0$ valore 0.

$f(x) = |x|$ pari
$f(-x) = |-x| = |x|$



$f(x) = 3x^4 - |x| + 1$

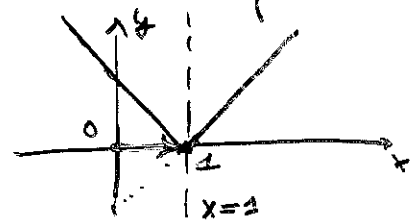
la somma di 2 o più funzioni pari è pari:

se $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = g(-x)$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) =$
$= (f+g)(-x)$

$f(x) = |x - 1|$?

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \ge 1 \\ 1-x & \text{se } x<1 \end{cases}$$



= grafico di $|x|$ traslato di 1 unità nella direzione e verso dell'asse x

il grafico è simmetrico rispetto a $x=1$

$f(x) = 4x^3 - x$ è dispari?

Sì perché è somma di 2 funz dispari

$f(x) = (x+1)^3$ non è dispari poiché è traslata di x^3 di 1 unità nella direz dell'asse x e verso opposto

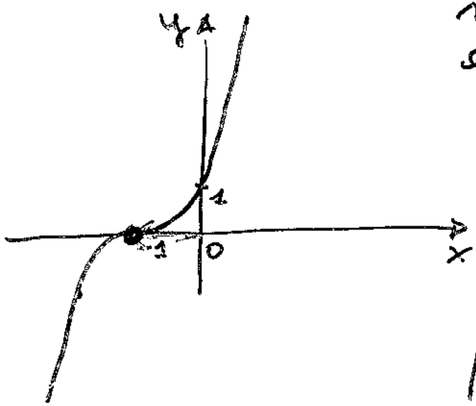


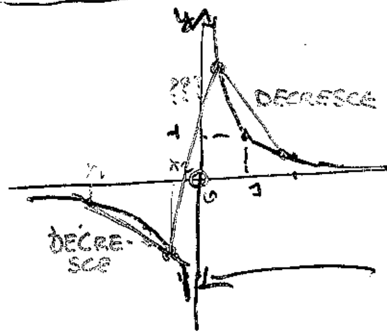
Grafico è simmetrico rispetto a $(-1,0)$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

è dispari poiché

$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$

x	1	-1	2	1/2
$1/x$	1	-1	1/2	2



per simmetria.

In figura si mostra perché non si può parlare di MONOTONIA su unione di INTERVALLI

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ (definita su un intervallo)

Dico che f è una funzione monotona crescente in senso stretto su (a,b) se

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

non decrescente: $\forall x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

decrescente in senso stretto

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

non crescente $\forall x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

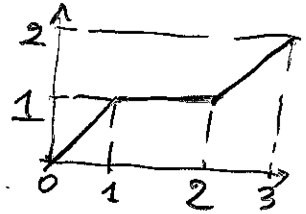
$f(x) = \frac{1}{x}$ è def. in $(-\infty, 0)$ e in $(0,+\infty)$

$\forall x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

f è decrescente su $(0,+\infty)$

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty,0)$ $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

f è decresc. su $(-\infty, 0)$



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \in [0,1) \\ 1 & \text{per } x \in [1,2) \\ x-1 & \text{per } x \in [2,3] \end{cases}$$

monotona non decrescente

Una funzione costante è monotona? tanto non crescente che non decrescente.