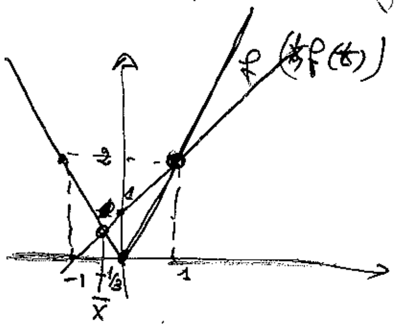
11/10/2011 (1)

$x+4-2|x|<3$

si risolve più facilmente usando i grafici delle funz. coinvolte.

$x+4-3<2|x|$

$\underbrace{x+1}_{f(x)} < \underbrace{2|x|}_{g(x)}$



$\bar{x}<0$

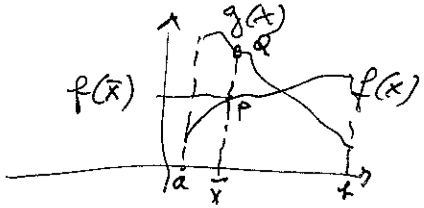
$x+1<-2x$

$x<-1/3$

$\bar{x}>0$: $x>1$

$P=(\bar{x}, f(\bar{x}))$ $Q=(\bar{x}, g(\bar{x}))$

quando il punto Q (che sta sulla retta $x=\bar{x}$ come P) risulta stare AL DI SOPRA di P



Le soluzioni della disequazione sono gli
$x\in(-\infty,-1/3)\cup(1,+\infty)$

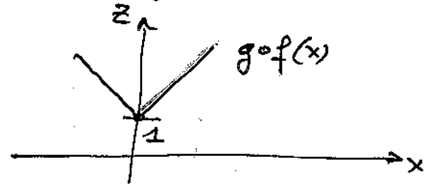
(2)

$f(x)=|x|$ $g(x)=x+1$

$f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$y=f(x)=|x|$ $g(y)=y+1$

$g\circ f(x)=g(|x|)=|x|+1$



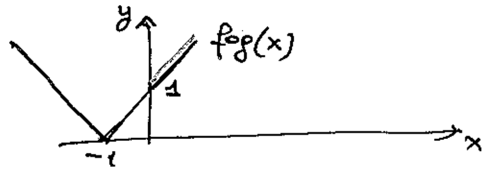
$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ arrivo ma è l'immagine

$f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$

$g:[0,+\infty)\to[1,+\infty)$ immagine

$y=g(x)=x+1$ $f(y)=|y|$ $f\circ g:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$

$f\circ g(x)=f(x+1)=|x+1|$



$\log_2(-x)$ $-\log_2(x)$

$\log_2(|x|)$ $|\log_2 x|$

Scomponiamo:

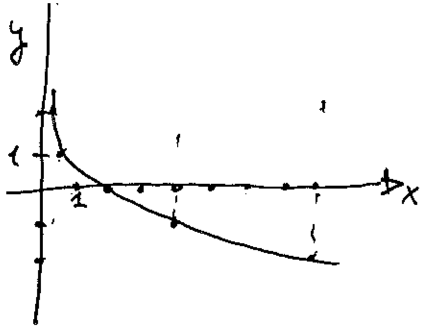
$\log_2(-x)$ $x \xmapsto{-(\cdot)} -x \xmapsto{\log_2(\cdot)} \log_2(-x)$

$f(x)=-x$ $g(y)=\log_2(y)$ $g\circ f(x)$

Scomponiamo

$-\log_2(x)$ $x \xmapsto{\log_2(\,)} \log_2(x) \xrightarrow{-(\,)} -\log_2(x)$

$f(x)=\log_2(x)$ $g(y)=-y$ $g\circ f(x)$



scompone $\log_2(|x|)$

$$x \xmapsto{|\,|} |x| \xrightarrow{\log_2()} \log_2(|x|)$$

$y = f(x) = |x| \qquad g(y) = \log_2(y) \qquad g \circ f(x)$

$f: \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ ← devo restringere l'immagine di f e questo implica restringere il suo dominio

$g: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

scompone $|\log_2 x|$

$$x \xmapsto{\log_2()} \log_2 x \xmapsto{|\,|} |\log_2 x|$$

$y = f(x) = \log_2(x) \qquad g(y) = |y| \qquad g \circ f(x)$

$f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \to [0,+\infty) \qquad g \circ f: (0,+\infty) \to [0,+\infty)$

Considero una funz. $f: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$
e una funz. $g: C \subseteq \mathbb{R} \to D \subseteq \mathbb{R}$
Supponiamo inoltre che $B \cap C \neq \emptyset$
Allora posso definire la composizione $g \circ f$ (g composto f) come segue

restringo il dominio di f in modo che sia il massimo compatibile con il fatto che l'immagine della restrizione sia $B \cap C$: E
e restringo il dominio di g a $B \cap C$
e definisco

$$g \circ f: E \to g(B \cap C)$$

in questo modo

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in E$$

se $C = A$ e $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$

$\forall x \in A: \quad g \circ f(x) = x$
$\forall y \in B \quad f \circ g(y) = y$

dico che la funzione f è invertibile e chiamo g: funzione inversa di f e la denoto con f^{-1}

ATTENZIONE f^{-1} non è $\frac{1}{f}$

La composizione è un'operazione binaria associativa, dotata di elemento neutro $id(x) = x$

$$g \circ f = id_A$$
$$f \circ g = id_B$$

Esempio

$f(x) = x^3$

è invertibile? So che $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$

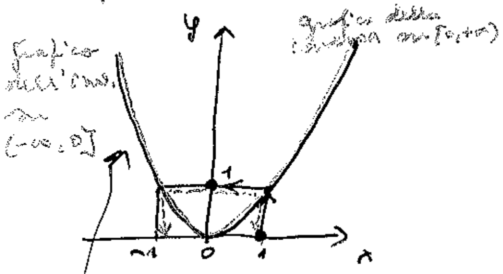
$g(y) = \sqrt[3]{y}$

$$g \circ f(x) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$$

$$f \circ g(y) = f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$$

è vero quindi che $\sqrt[3]{y}$ è la funzione inversa di x^3 relativamente all'intero I.D.$(x^3) = \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ non è invertibile su $\mathbb{R}$



$f(x) = x^2$ con dominio $[0,+\infty)$ è invertibile e la sua inversa è $g(y) = \sqrt{y}$

Difatti: $g \circ f(x) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$ poiché $x \geq 0$

$$f \circ g(y) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$$

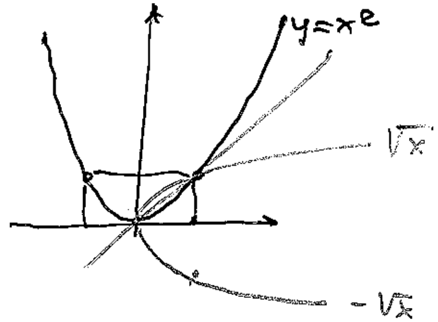
$f(x) = x^2$ con dominio $(-\infty, 0]$ è invertibile e la sua inversa $g(y) = -\sqrt{y}$

Difatti $g \circ f(x) = g(x^2) = -\sqrt{x^2} = -|x| \underset{x<0}{=} -(-x) = x$

$$f \circ g(y) = f(-\sqrt{y}) = (-\sqrt{y})^2 = y.$$

Quali sono i grafici delle funzioni inverse in questo esempio?

Se la variab. ind. è y



grafici delle inverse (sull'intervallo $[0,+\infty)$ e sull'intervallo $(-\infty,0]$) quando chiamo x la variabile indipendente

il grafico della funzione inversa di una funz. invertibile f, se penso che la variabile indip. sia x, esattamente come la variabile di f, sarà il simmetrico rispetto alla bisettrice 1°-3° quadrante del grafico di f

$f(x) = x^\alpha$ $\qquad$ $x^\alpha = y$

Chi è la sua inversa? $\qquad$ $x = y^{1/\alpha}$

$f^{-1}(y) = y^{1/\alpha}$

verifica $\quad f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(x^\alpha) = (x^\alpha)^{1/\alpha} = x^1 = x$

$$f \circ f^{-1}(y) = f(y^{1/\alpha}) = (y^{1/\alpha})^\alpha = y.$$

$\boxed{\text{Teorema 1}}$: se $f : A \to \underset{f(A)}{\overset{\shortparallel}{B}}$ è crescente allora f è dotata di inversa f^{-1}, che pure è crescente.

$\boxed{\text{Teorema 2}}$: $f : A \to B$ è invertibile se e solo se è biunivoca

Serve il Teor. 2 per mostrare la 1ª parte del teor. 1.
Inizio con la definizione!

Def. dico che $f: A \to B$ è biunivoca se succedono 2 cose:

1) è iniettiva INIETTIVA cioè $\forall a_1, a_2$ se $a_1 \neq a_2$ anche $f(a_1) \neq f(a_2)$

2) è SURIETTIVA $\forall b \in B$ esiste una $a \in A$ t.c. $f(a) = b$

Dimostro che se f $(: A \to B)$ è biunivoca allora è invertibile!

Considero la funzione $g: B \to A$ definita così:
$\forall b \in B$ cerco il valore $a \in A$ t.c. $f(a) = b$ che esiste per SURIETT. — Questo valore è unico per INIETTIVITÀ.

Associo
$\forall b \in B \quad b \xrightarrow{g} a$: è una funzione di $B \to A$

Dico che questa è l'inversa di f. Infatti

$$g \circ f(a) = g(f(a)) = a$$

$f(g(b)) = f($quell'a t.c. $f(a)=b) = b$ Ok

Dimostro che f se è invertibile è biunivoca.

$f: A \to B$, $f^{-1}: B \to A$ con le proprietà che definiscono l'inversa

Mostro che è iniettiva

siano $a_1, a_2 \in A$; se $f(a_1) = f(a_2)$, applico f^{-1}

$a_1 = f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2)) = a_2$: O.K.

Mostro che è suriettiva: $\forall b \in B$: applico f^{-1} e trovo $a = f^{-1}(b)$. Risulta $f(a) = f(f^{-1}(b)) = b$: O.K.

Mostro che se $f: \overset{[a,b]}{A} \to B$ è strettamente crescente allora è iniettiva!

per def. $\forall a_1, a_2 \in A$ e $a_1 < a_2$ allora $f(a_1) < f(a_2)$

Quindi vedo che se $a_1 \neq a_2$ allora anche $f(a_1) \neq f(a_2)$

(idem se è strettam. decrescente):

Ora restringo l'insieme di arrivo:

se $f: [a,b] \to f([a,b])$ è strettamente crescente (decrescente) allora è biunivoca e quindi invertibile. Inoltre!

|| se è crescente anche $f^{-1}: f([a,b]) \to [a,b]$ è crescente.

Dimostr. $\forall y_1, y_2 \in f([a,b])$ e sia $y_1 < y_2$ mostro che non può succedere che risulti

$$[a,b] \ni f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \in [a,b]$$

se fosse così potrei applicare f a entrambi i membri e poiché f è crescente troverei:

$$y_1 = f \circ f^{-1}(y_1) \geq f \circ f^{-1}(y_2) = y_2$$

contraddice l'ipotesi.

|| lo stesso teorema vale per funz. decrescenti