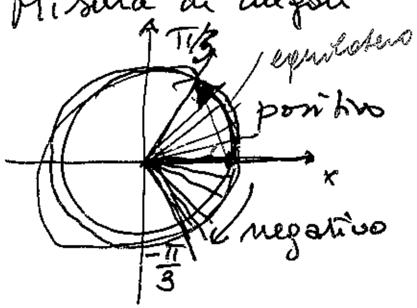
Misura di angoli

①



$60° = \frac{1}{3} 180°$

↳ in rad. è $\frac{\pi}{3}$

$$\boxed{\frac{\alpha°}{180°} = \frac{\alpha^{\,rad}}{\pi \; rad}}$$

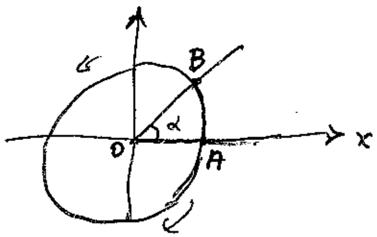
$\alpha° = 30°$ $\qquad \alpha\,(rad) = \frac{1}{6} \cdot \pi \; rad.$

$\alpha° : 180° = \alpha\,(rad) : \pi\,(rad)$

un angolo α misurato in radianti è >0 se il secondo lato dell'angolo è ottenuto facendo ruotare il primo in verso ANTI-ORARIO

se faccio una rotazione in verso positivo e torno a sovrapporre allo stesso secondo lato la misura diventa $\alpha + 2\pi$

se la faccio in verso negativo la misura diventa $\alpha - 2\pi$



L'angolo $A\hat{O}B$ è l'immagine statica dell'angolo di misura $\alpha \in [0, 2\pi)$ ma anche tutti gli angoli di misura $\alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Per def. di sen e cos. vedi lucidi 21/10/2010 e 26/10/2010 (scorso anno) pag. 6 e seguenti

Seno e coseno sono funzioni definite $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e sono periodiche di periodo 2π, cioè $\cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha$, $\operatorname{sen}(\alpha+2\pi) = \operatorname{sen}\alpha$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

②

Definizione: Dico che una funzione $f: A \to B$ ($A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$) è limitata se è limitato il suo insieme immagine $f(A) =$

$= \{ b \in B \mid b = f(a) \text{ per almeno un } a \in A \}$

Cioè esistono un l e un $L \in \mathbb{R}$ tali che $\forall a \in A$

$$l \leq f(a) \leq L$$

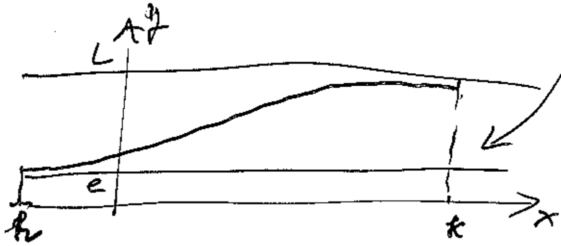
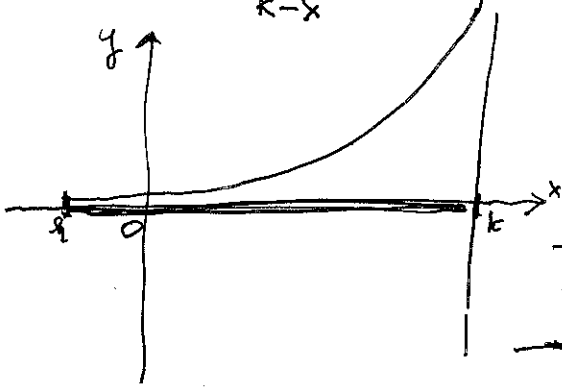
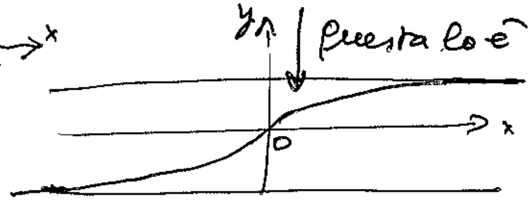


grafico compreso in questa fascia ad es. come in figura ($A = [h,k]$)

Questa non è limitata:

$f(x) = \frac{1}{k-x}$ nell'intervallo $[h,k)$





$|\operatorname{sen}x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$ dicono che $\operatorname{sen}x$ e $\cos x$ sono funzioni limitate

Regole di calcolo

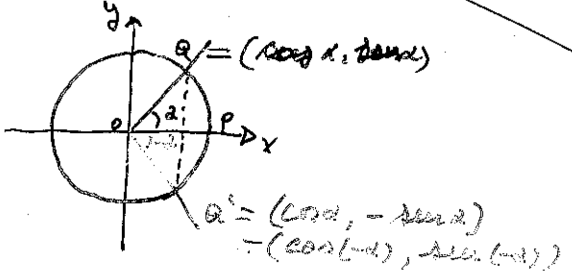
$$\operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_2) = \operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2$$

ne deduco:

$$\operatorname{sen}(\alpha_1-\alpha_2) = \operatorname{sen}(\alpha_1+(-\alpha_2)) = \operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1(-\operatorname{sen}\alpha_2) = \operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha_1$$

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \quad \text{funzione dispari}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \quad \text{funzione pari}$$



inoltre

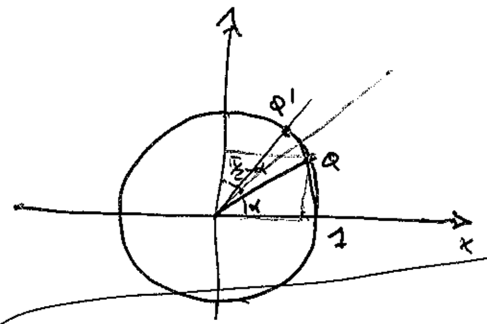
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$$

e quindi

$$\cos(\alpha_1\pm\alpha_2) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha_1\pm\alpha_2)\right) =$$

Considero il caso con il segno +



$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1-\alpha_2\right) = \operatorname{sen}\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right)-\alpha_2\right) =$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right)\cos\alpha_2 - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right)\operatorname{sen}\alpha_2 =$$

$$= \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2$$

ecc.

$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ e $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$ o anche:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

da cui

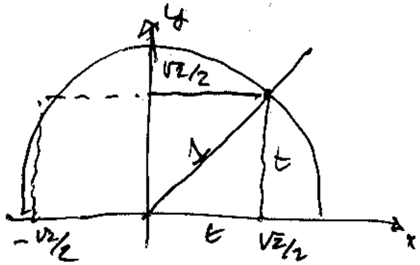
$$\frac{2}{2}\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

ma $\operatorname{sen}\alpha$ è una funzione quindi posso usare questa formula solo se sono in grado di scegliere a priori il segno

Similmente

$$\cos\alpha = \underset{??}{\pm}\sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}}$$

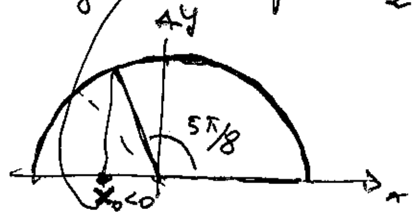
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = +\sqrt{\frac{\cos \pi/4 + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}/2+1}{2}}$$



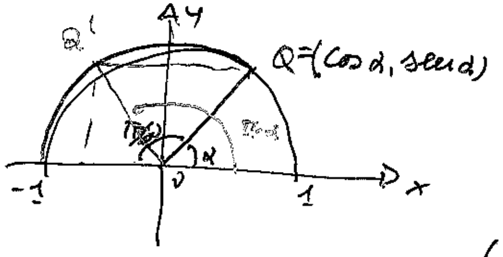
$$t^2+t^2=1 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\frac{\cos 5\pi/4 + 1}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}}$$



Più in generale:



⇒ Q' che è simmetrico di Q risp. alle asse y ha coordinate

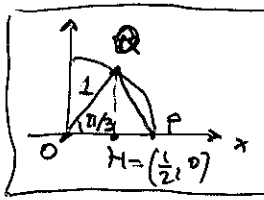
$(\cos(\pi-\alpha), \operatorname{sen}(\pi-\alpha)) = (-\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

Quindi vale la proprietà

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen} x$$

Basta studiare sen x e cos x nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tenuto conto della propr. appena vista e della periodicità, (per cui mi posso limitare a $[-\pi, \pi]$ e della parità di cos x e disparità di sen x che permette di restringere le considerazioni a $[0, \pi]$)

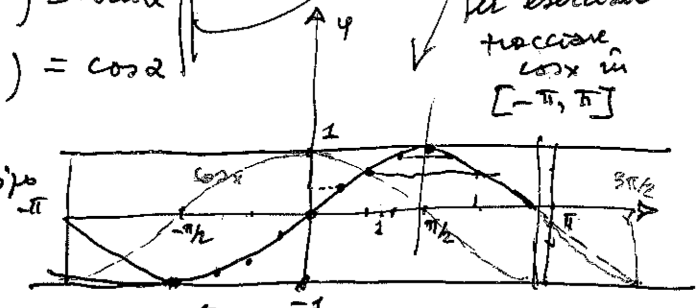
α	0	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$
$\operatorname{sen}\alpha$	0	1	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\cos\alpha$	1	0	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$



$\Rightarrow QH = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

per esercizio tracciare cos x in $[-\pi, \pi]$



sen x cresce negli intervalli del tipo $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

e decresce in quelli del tipo $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$

cos x cresce negli intervalli di tipo $(-\pi + 2k\pi, 2k\pi)$
decresce " " " $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$

Come posso trovare una funz. inversa?
Devo restringere il dominio a un intervallo in cui la funz. sia monotona

Se considero la funzione

$y = f(x) = \operatorname{sen} x$ con dominio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\operatorname{Imm}(f) = [-1, 1]$

essendo crescente è invertibile e la sua inversa la chiamo

$$f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y$$

Se considero la funz.

$y = g(x) = \cos x$ con dominio $[0, \pi]$ $\operatorname{Imm} g = [-1, 1]$

essendo decrescente è invertibile e la sua inversa la chiamo

$$g^{-1}(y) = \arccos y.$$

Se voglio l'inversa di
$h(x) = \sin x$ con dominio $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
devo prendere
$h^{-1}(y) = \pi - \operatorname{arcsen} y$
Se voglio quella di
$K(x) = \cos x$ con dominio $[-\pi, 0]$
devo prendere
$K^{-1}(y) = -\arccos y$ ecc.