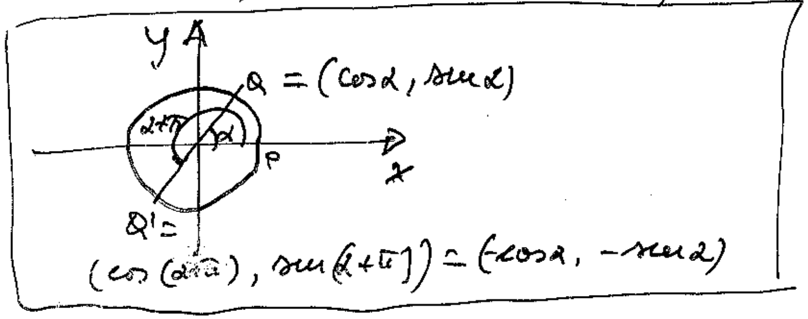
(1)

$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ è definita in $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$

$\operatorname{sen}(\alpha+\pi) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$



$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

$\operatorname{tg} x$ è funzione periodica di periodo π

$\operatorname{sen} x$ è dispari

$\cos x$ è pari

$f(x) = f(-x)$

$g(x) = -g(-x)$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{f(-x)}{-g(-x)} = -\frac{f(-x)}{g(-x)}$$

$\Rightarrow$ la funz rapporto delle due è dispari

Quindi studio $\operatorname{tg} x$ in un intervallo (PER LA PERIODICITÀ) di ampiezza π e centrato nell'origine (PER LA SIMMETRIA)

e quindi sostanzialmente in $(0, \pi/2)$

(2)

perché in $[0, \pi/2)$ la funz. $\operatorname{tg} x$ è crescente?

Conclusione della PAG:
$\operatorname{tg} x$ in $[0, \pi/2)$ è crescente $\Rightarrow$ anche in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$\operatorname{sen} x$ sull'intervallo $[0, \pi/2)$ è crescente

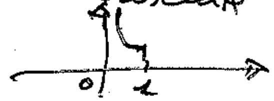
$\cos x$ " $[0, \pi/2)$ è decrescente

La funzione $\frac{1}{\cos x}$ è composta:

$$x \xmapsto[f]{\cos(\ )} \cos x \xmapsto[g]{\frac{1}{(\ )}} \frac{1}{\cos x}$$

f è decrescente in $[0, \pi/2)$ e ha immagine $(0, 1]$

g in $(0, 1]$ è decrescente

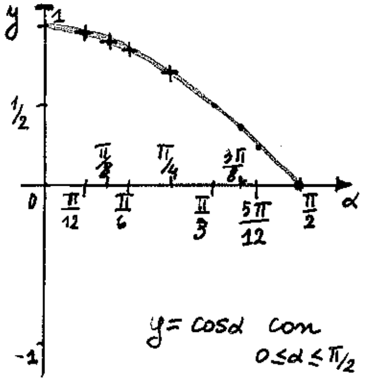


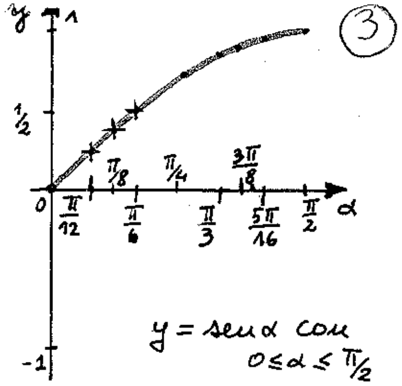
ogni volta che compongo una $f: A \to B$ decrescente con una $g: B \to C$ decrescente ho una $g \circ f$ crescente

[se f decr. composta g cresc.: $g \circ f$ decr.
f cresc. " f decr. $g \circ f$ decr.
f cresc. " g cres: $g \circ f$ cresc.]

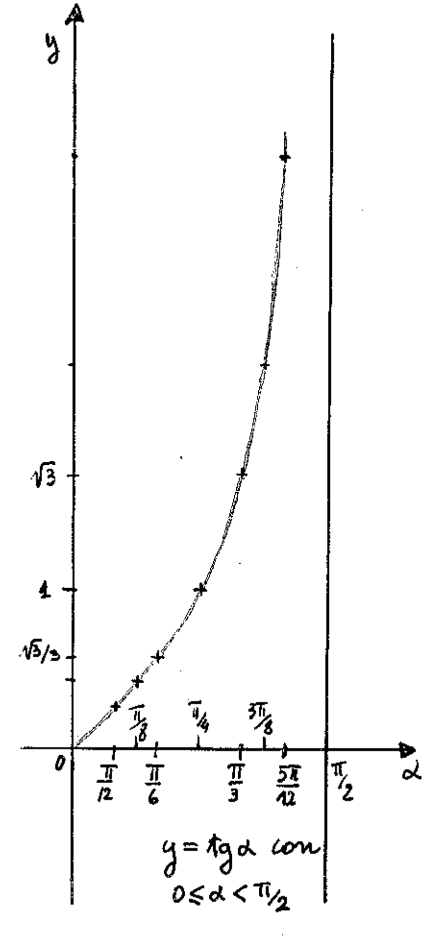
$\forall x_1, x_2 \in A: \ x_1 < x_2 \Rightarrow y_2 = f(x_1) > f(x_2) = y_1$

$\forall y_1, y_2 \in B \ \ y_1 < y_2 \Rightarrow g(y_1) > g(y_2) \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2))$

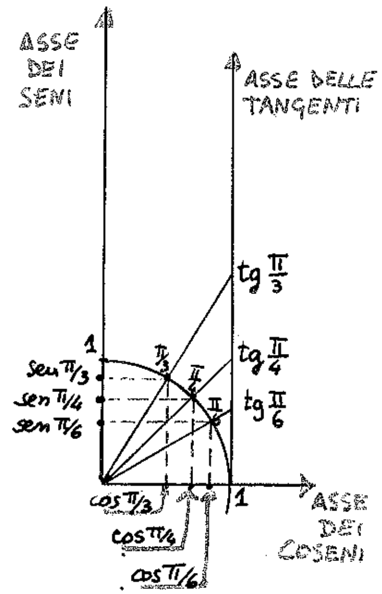




Note le relasioni tra seno e coseno di angoli complementari basta ricavare 4+3 valori per avere il grafico con il dettaglio proposto



Metodo grafico (senza calcoli) per trovare $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ noto α (sempre $0 \le \alpha < \pi/2$)



α	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/12$? VEDI SOTTO
$\operatorname{sen}\alpha$	0	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\operatorname{tg}\alpha$	0	1	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2} = 2-\sqrt{3}$

* la tangente di α rappresenta il coeff. angolare della retta passante per $(0,0)$ e che forma con l'asse x un angolo di misura (in radianti): α

$$\alpha = \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \qquad \left(\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

è un numero $\in (0,1)$ e abbastanza piccolo come deve essere $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$?

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} < 1$$

ECC. VERIFICHE

Verifica finale:

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 = 1$$

$$\frac{6+2}{16} + \frac{2+6}{16} = 1$$

SPIEGAZIONI DI FORMULE DATE PER OVVIE IERI

$$\cos(\alpha_1+\alpha_2) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \mathrm{sen}\,\alpha_1\, \mathrm{sen}\,\alpha_2$$

$\alpha_1=\alpha_2=\alpha$

$$\cos(2\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha\cdot\mathrm{sen}\,\alpha =$$
$$=(\cos\alpha)^2-(\mathrm{sen}\,\alpha)^2$$

Vale $(\cos\alpha)^2+(\mathrm{sen}\,\alpha)^2=1$

$(\cos\alpha)^2 \overset{1^a}{=} 1-(\mathrm{sen}\,\alpha)^2$

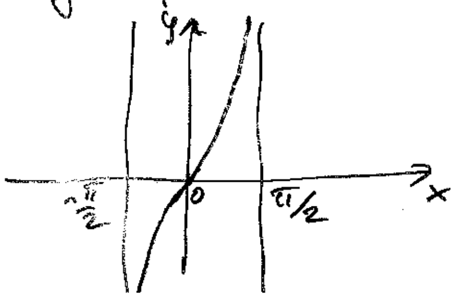
o anche $(\mathrm{sen}\,\alpha)^2 \overset{2^a}{=} 1-(\cos\alpha)^2$

$$\cos 2\alpha \overset{1^a}{=} 1-(\mathrm{sen}\,\alpha)^2-(\mathrm{sen}\,\alpha)^2 =$$
$$1-2(\mathrm{sen}\,\alpha)^2$$

$$\cos 2\alpha \overset{2^a}{=} (\cos\alpha)^2-(1-(\cos\alpha)^2) =$$
$$= 2(\cos\alpha)^2-1$$

---

esiste e dove la funzione inversa di $\mathrm{tg}\,x$?

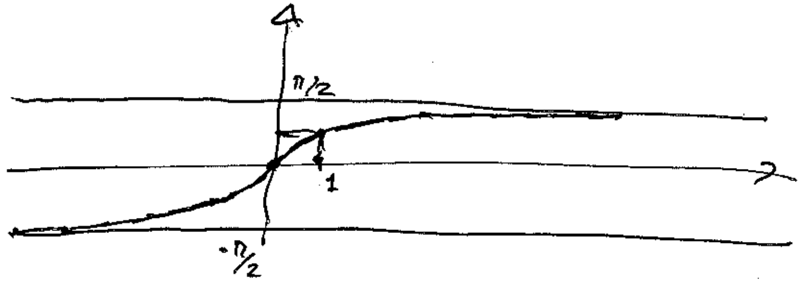


$\mathrm{tg}\,x$ è invertibile su ciascuno degli intervalli in cui è definita.
Ci sarà un'inversa relativa all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$, una relativa a $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ecc.

Se considero la funzione

$$f: (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita dalla legge $f(x)= \mathrm{tg}\,x = y$
questa ha inversa che si chiama
$\mathrm{arctg}\, y$ (arcotangente di y)



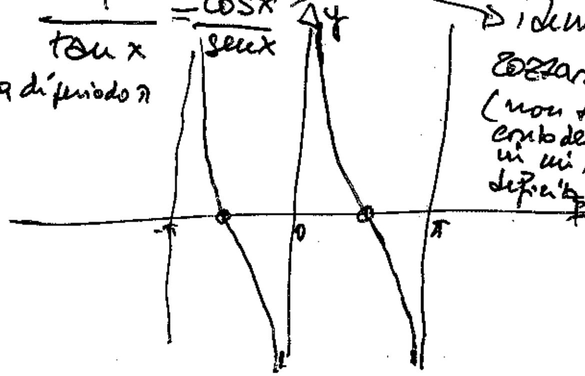
$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$$
arctan

è una funzione limitata, non è periodica

ATTENZIONE $\arctan x$ non è $\frac{1}{\tan x}$

Grafico di $\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\, x}$ → identificando erroneamente (non tengo conto dei punti in cui non è definita)

è funz. periodica di periodo π
Definita in $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(0+k\pi, \pi+k\pi)$



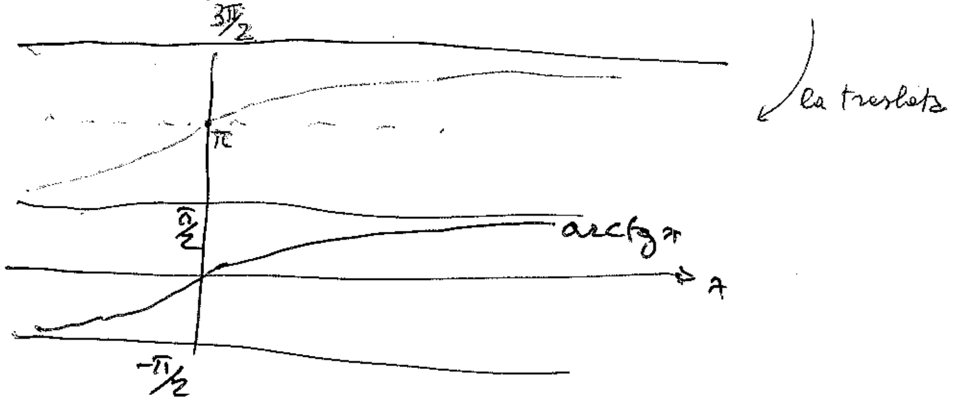
decrescente su ogni intervallo in cui è definita ecc...

se voglio trovare l'inversa ad es. della funz.:

$$g: \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita dalla legge $g(x) = \tan x$

NON posso prendere l'arctang, MA:

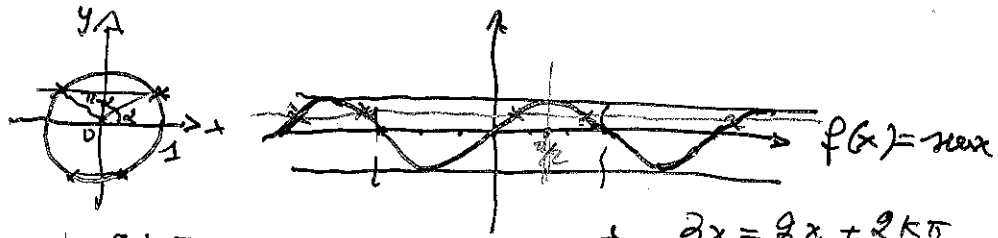


$$g^{-1}(y) = \pi + \operatorname{arctg} x$$

ESERCIZI

$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 2x$

quando due angoli α, β danno luogo allo stesso valore: $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$?



$\alpha + 2k\pi$

$\pi - \alpha + 2k\pi = (2k-1)\pi - \alpha$

$\Rightarrow$ $3x = 2x + 2k\pi$

$3x = (2k-1)\pi - 2x$

$x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ oppure

$5x = (2k-1)\pi$ cioè $x = \frac{2k-1}{5}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{sen} 3x = \cos 2x$

$\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$\cos 2x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Rightarrow \operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$3x = (2k-1)\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \quad k \in \mathbb{Z}$

risolvo rispetto a x e ho le soluz.

$\operatorname{sen} 2x = \cos 2x$

osservo che se $\cos 2x = 0$: $|\operatorname{sen} 2x| = 1$ e quindi non potrebbe valere =

posso dividere per $\cos 2x$

$\operatorname{tg} 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$

$\text{sen}\,x + \cos x > 0$

2 strade ... anzi 3!

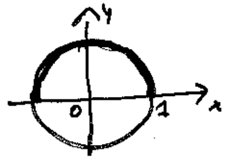
1) strada sicura. La diseq. equivale a

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{sen}\,x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x > 0$$

uso le formule di addizione ricordando che $\sqrt{2}/2 = \cos\frac{\pi}{4} = \text{sen}\,\pi/4$

$$\Updownarrow$$

$$\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > 0$$



$$\Updownarrow$$

$$0 + 2k\pi < x + \pi/4 < \pi + 2k\pi$$

Soluzione: $-\pi/4 < x < 3\pi/4 + 2k\pi$

---

2) Strada spontanea e ... artistica.

$\text{sen}\,x > -\cos x$ VORREI DIVIDERE per $\cos x$ e riportarmi alla tangente. DEVO dividere in casi:

A) $\cos x = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x = \pm 1$. Ovviamente $-1 \not> 0$ quindi la sola soluz è $\text{sen}\,x = 1$ $\Rightarrow x = \pi/2 + 2k\pi$

B) $\cos x \neq 0$. Ho due sistemi, a seconda del segno:

$$\begin{cases}\cos x > 0\\ \text{tg}\,x > -1\end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases}\cos x < 0\\ \text{tg}\,x < -1\end{cases}$$

Ricordo che tg x è funzione crescente e quindi conserva il verso della disug. Allora in $[-\pi/2, 3\pi/2]$ i due sistemi equivalgono a

$$\begin{cases}x \in (-\pi/2, \pi/2)\\ x \in (-\pi/4, \pi/2) \cup (3\pi/4, 3\pi/2)\end{cases} \quad \text{opp.} \quad \begin{cases}x \in (\pi/2, 3\pi/2)\\ x \in (-\pi/2, -\pi/4) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})\end{cases}$$

cioè

$x \in (-\pi/4, \pi/2)$ oppure $x \in (\pi/2, 3\pi/4)$

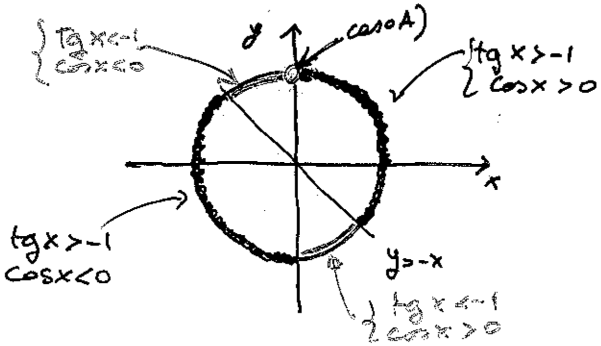
Ora ricordo la periodicità:

sull'asse reale le soluzioni nel caso B) sono

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

Infine unisco la situazione del caso A) con quella del caso B) e trovo:

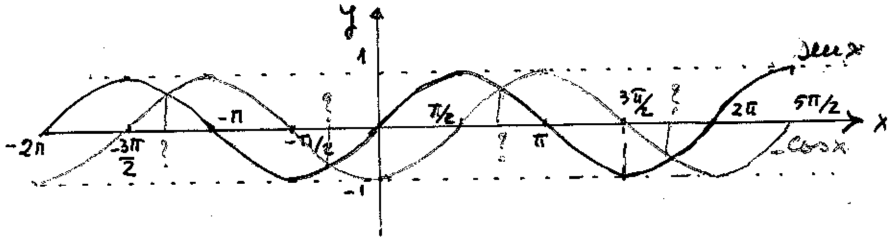
$$x \in (-\pi/4 + 2k\pi, 3\pi/4 + 2k\pi)$$



---

3) Strada grafica.

$\text{Sen}\,x > -\cos x$. Posso confrontare i due grafici



E' chiaro dal grafico (???) che il grafico di sen x sta "sopra" quello di $-\cos x$ in certi intervalli ... si tratta di individuare dove sono le intersezioni che, per motivi di simmetria si troveranno nel punto medio dell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, in quello dell'intervallo $(\pi/2, \pi)$ ecc.

Ovviamente vengono fuori le stesse soluzioni!