ESERCIZIO

$f(x) = 2^{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}$ Scomporre

(regola della calcolatrice)

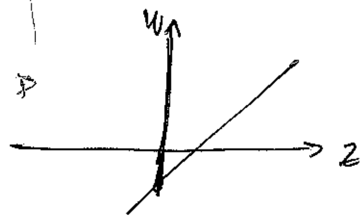
$$x \xmapsto{\sqrt{\ldots}} \sqrt{x} \xmapsto{\frac{1}{(\ )}} \frac{1}{\sqrt{x}} \xmapsto{(\ )-1} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \xmapsto{2^{(\ )}} 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}$$

$F(x) = \sqrt{x} = y$

$G(y) = \frac{1}{y} = z$

$H(z) = z - 1 = w$

$K(w) = 2^{w}$



quindi $F(x) = K \circ H \circ G \circ F(x) =$

$= K(H(G(F(x))))$

$F: [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ I.D. e immagini

$G: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

se voglio comporre $G \circ F$ devo operare la restrizione di F all'insieme $(0, +\infty)$ in modo che l'immagine della funzione non contenga 0:

$$F|_{(0,+\infty)} : (0, +\infty) \longrightarrow \underset{D(G)}{\boxed{(0, +\infty)}}$$

e devo restringere il dominio di G in modo che coincida con Imm F

$$G|_{(0,+\infty)} : \boxed{(0, +\infty)} \longrightarrow \boxed{(0, +\infty)}$$

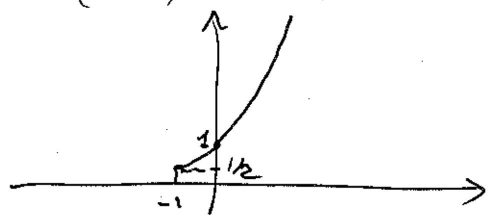
$H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (I.def e immagine). Restrizione

$$H|_{(0,+\infty)} : \boxed{(0, +\infty)} \longrightarrow (-1, +\infty)$$

$K: \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ in generale

ma devo considerare la restrizione

$$K|_{(-1,+\infty)} : (-1, +\infty) \longrightarrow (1/2, +\infty)$$



Quindi f ha dominio $(0, +\infty)$

e ha immagine $(1/2, +\infty)$

La funzione $f(x)$ è monotona su tutto $(0, +\infty)$?

uso la scomposizione

$$x \underset{\text{cresc.}}{\xrightarrow{\sqrt{\ }}} \sqrt{x} \underset{\text{decresc.}}{\xrightarrow{\frac{1}{(\ )}}} \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{\text{crescente}}{\xrightarrow{(\ )-1}} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \underset{\text{cresce}}{\xrightarrow{2^{(\ )}}} f(x)$$

$\Rightarrow f(x)$ è decrescente su $(0, +\infty)$

La funzione $f(x)$ è dotata di inversa

$$f^{-1} : (1/2, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$$

Calcoliamola.

$y = 2^{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}$ devo esplicitare x in funz. di y cioè risolvo l'eq. in x

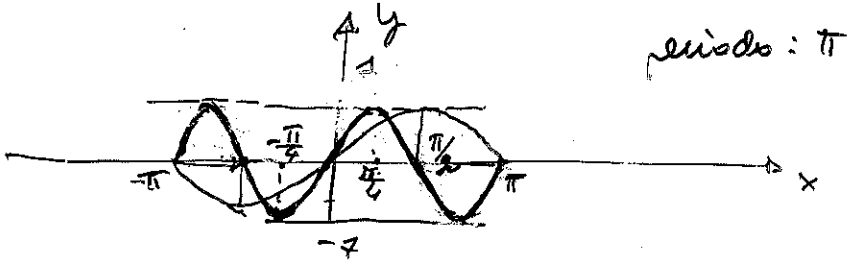
$\log_2$

$\log_2 y = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \Rightarrow \log_2 y + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow$

$\sqrt{x} = \frac{1}{\log_2 y + 1} \Rightarrow x = \frac{1}{(\log_2 y + 1)^2} = f^{-1}(y)$

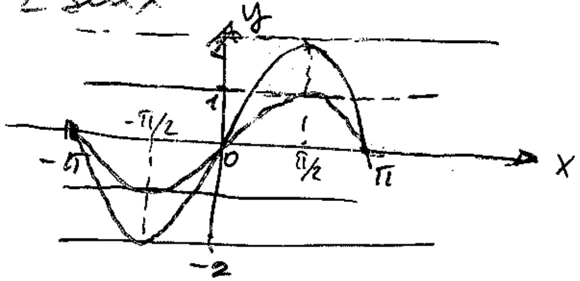
$f(x) = \operatorname{sen} 2x$ $\qquad x \xmapsto{2\cdot()} 2x \xrightarrow{\operatorname{sen}()} f(x)$

periodo: π



$f(x) = 2 \operatorname{sen} x$ $\qquad x \xmapsto{\operatorname{sen}()} \operatorname{sen} x \xmapsto{2\cdot()} f(x)$

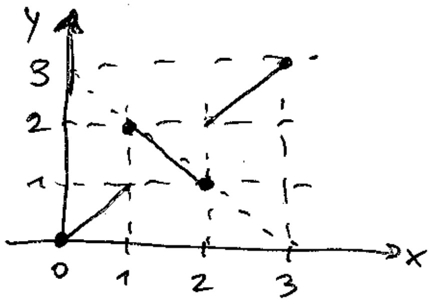
periodo 2π



effetto della dilatazione della variabile indipendente o di quella dipendente

---

è vero che una funzione $f:[a,b] \to [c,d]$ invertibile è PER FORZA monotona strettamente?



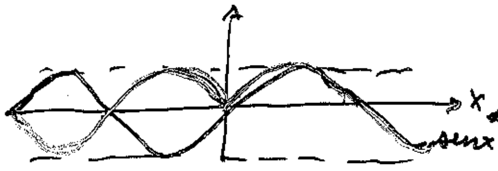
$[a,b] = [0,3]$

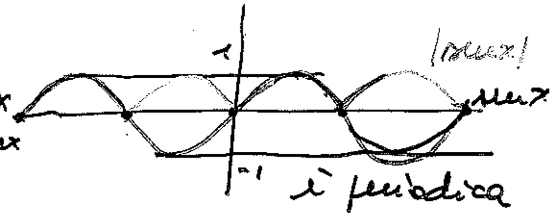
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ -x+3 & \text{se } x \in [1,2] \\ x & \text{se } x \in (2,3] \end{cases}$$

è biunivoca
è invertibile e
$f^{-1}(x) = f(x)$

NO!!

$f(x) = \operatorname{sen}|x|$ $\qquad g(x) = |\operatorname{sen} x|$





non è più periodica su $\mathbb{R}$

è periodica

effetto della composizione sulla periodicità

Esercizio per casa

Scomporre, trovare domini e immagini, verificare gli intervalli su cui crescono le componenti e la funz composta, e invertire dove possibile

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$$

$$f(x) = \log_3 |1 - \sqrt{x}|$$

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{2-x} - 1}$$

Supponiamo di avere una funzione $f: \underset{\mathbb{R}}{\overset{A}{\cap\!\!|}} \to \underset{\mathbb{R}}{\overset{B}{\cap\!\!|}}$ e supponiamo che la funzione sia limitata dal di sopra (cioè $f(A)$ lo è)

cioè $\exists\, L \in \mathbb{R}$ $\forall\, x \in A$ risulti $f(x) \le L$

$f(A)$ è superiormente limitata

$\Rightarrow$ ha estremo superiore (COMPLETEZZA)

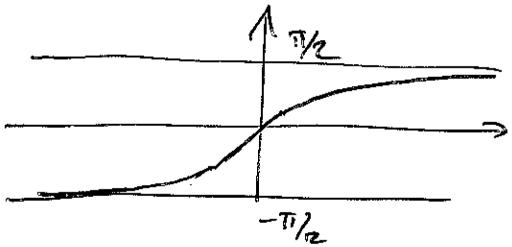
Definisco Estremo superiore di f su A

$\sup(f(A))$

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$$

ESEMPIO

$f(x) = \arctan x$



è limitata dal di sopra

$\arctan x < \pi/2$

$\Downarrow$

esiste $\sup_{x \in \mathbb{R}} (\arctan x) = \frac{\pi}{2}$

è limitata dal di sotto

esiste $\inf_{x \in \mathbb{R}} (\arctan x) = -\frac{\pi}{2}$

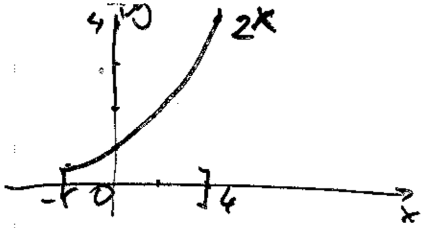
non ha né max né min. poiché $\sup f = \pi/2$ e $\inf f = -\frac{\pi}{2}$ non sono valori assunti dalla funzione

$f(x) = -x^2$ superiorm. limitata poiché

$f(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\sup f = 0$

e visto che per $x=0$ $f(0) = \sup f$, questo è anche il massimo di $f(\mathbb{R})$ cioè quello che si def. è il MAX ASSOLUTO della funz.



$f: [-1, 2] \to [1/2, 4]$

$f(x) = 2^x$

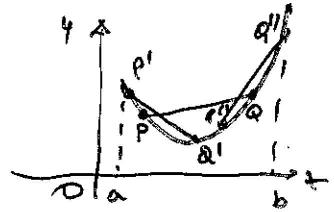
Questa funzione ha MAX assoluto 4 assunto nel punto $x=2$

Di una funzione abbiamo visto le seguenti caratteristiche, attributi

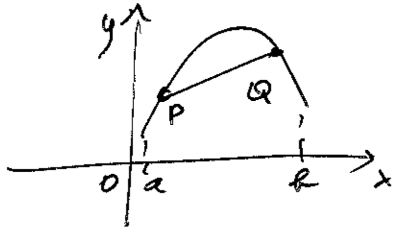
- dominio, immagine, grafico.
- monotonia su un intervallo $\quad a^x$
  - ? biunivocità $\Leftrightarrow$ invertibilità
- eventuali simmetrie (parità) $\quad x^3$, $\cos x$
- periodicità $\quad \operatorname{sen} x$
- limitatezza
  - $\sup f$, $\inf f$; $\max f$, $\min f$

lo studio di funzioni è motivato molto spesso dalla necessità di risolvere equazioni o disequaz.

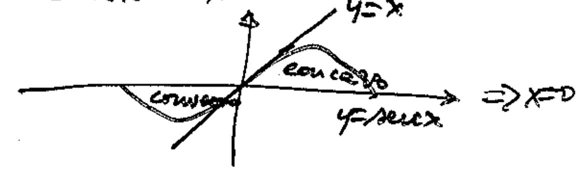
- zeri di una funzione
- Dico $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è convessa se ogni segmento PQ che congiunge coppie di punti del grafico giace al di sopra del grafico



è concava se succede il viceversa



$\operatorname{sen} x = x$



(7)

Concetto di successione

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ogni corrisp. di questo tipo viene detta successione.

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \dots \end{array}$$

mi basta l'elenco ordinato dei corrispondenti

Di solito indico la succ. in questo modo

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} =$$

termine generale della successione

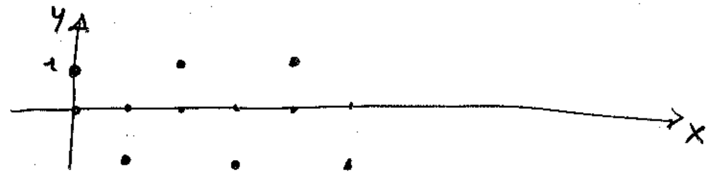
$$= \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n\}.$$

BRUTTO

Esempi

$$\{n^2\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0, 1^2=1, 2^2=4, 3^2=9, \dots, n^2, \dots\}$$

$$\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n$$



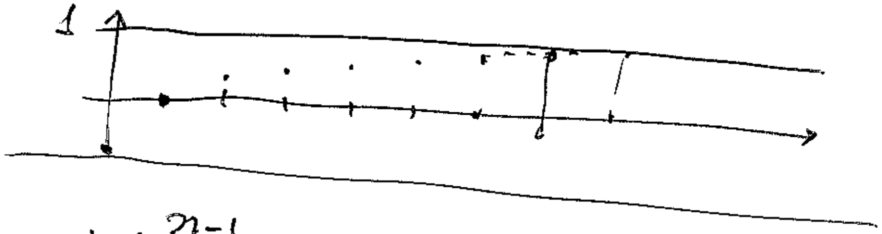
(8)

$$\left\{ \frac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \frac{n+1-2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} =$$

$$= \left\{ 1 - \frac{2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

è limitata?



$$-1 \le \frac{n-1}{n+1} < 1 \qquad \text{sì}$$