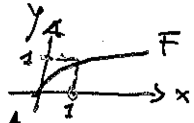
①

$f(x) = \log_3 |1-\sqrt{x}| = \log_3 |\sqrt{x}-1|$

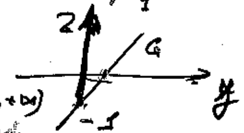
$x \overset{F}{\longmapsto} \sqrt{x} \xrightarrow[G]{(\ )-1} \sqrt{x}-1 \xrightarrow[H]{|\ |} |\sqrt{x}-1| \xrightarrow[k]{\log_3} f(x)$

$F(x) = \sqrt{x} = y$ $\qquad F: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$



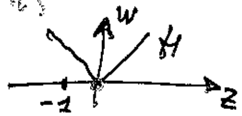
$G(y) = y-1 = z$ $\qquad G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$G|_{[0,+\infty)}: [0,+\infty) \to [-1,+\infty)$

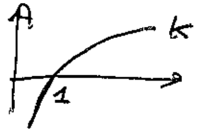


$H(z) = |z| = w$ $\qquad H: \mathbb{R} \to [0,+\infty)$

$H|_{[-1,+\infty)}: [-1,+\infty) \to [0,+\infty)$



$k(w) = \log_3 w$ $\qquad k: (0,+\infty) \to (-\infty,+\infty)$



$F|_{[0,1)\cup(1,+\infty)}: [0,1) \cup (1,+\infty) \longrightarrow [0,1) \cup (1,+\infty)$

$G|_{[0,1)\cup(1,+\infty)}: [0,1) \cup (1,+\infty) \longrightarrow [-1,0) \cup (0,+\infty)$

$H|_{[-1,0)\cup(0,+\infty)}: [-1,0) \cup (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$

$k \qquad : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

Monotonia? Su ciascuno dei 2 intervalli che compongono il dominio di F, F è crescente; idem per G(y); H(z) è decresc. [-1,0) e cresc. (0,+∞); k(w) è cresc su ... (0,+∞)

②

$\log_3: (0,1] \to (-\infty,0]$

$f|_{[0,1)}: [0,1) \longrightarrow (-\infty,0]$ decrescente

$f|_{(1,+\infty)}: (1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente

posso invertire f solo relativamente ai singoli intervalli

$f_1^{-1}|_{(-\infty,0]}: (-\infty,0] \longrightarrow [0,1)$

$f_2^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow (1,+\infty)$

Per trovare qual è l'espressione analitica delle 2 inverse, risolvo l'equazione

$$v = \log_3 |\sqrt{x}-1|$$

$$\downarrow k^{-1}(v) = 3^v = w$$

$$3^v = |\sqrt{x}-1|$$

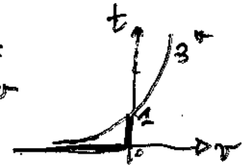
$\boxed{x \in [0,1) \quad v \in (-\infty,0]}$ $\qquad$ $\boxed{x \in (1,+\infty) \quad v \in \mathbb{R}}$

$3^v = 1-\sqrt{x}$ $\qquad$ $3^v = \sqrt{x}-1$

$\downarrow G^{-1}$ $\qquad$ $\downarrow G^{-1}$

$3^v - 1 = -\sqrt{x}$ $\qquad$ $3^v + 1 = \sqrt{x}$

$\sqrt{x} = 1 - 3^v$



$\downarrow F^{-1}$ $\qquad$ $\downarrow F^{-1}$

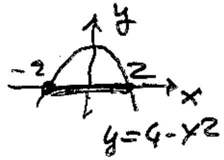
$\boxed{x = (1-3^v)^2}$ $\qquad$ $\boxed{x = (1+3^v)^2}$

Concretamente: l'eq. $v = \log_3|\sqrt{x}-1|$ ha 2 soluzioni se $v \in (-\infty,0]$ e ne ha 1 se $v \in (0,+\infty)$

# Disequazioni (ed equazioni) con i RADICALI

$\sqrt{4-x^2} < x+1$ $\qquad$ $\sqrt{4-x^2} = x+1$

richiedono le stesse cautele




① I.D. $4-x^2 \geq 0 \iff -2 \leq x \leq 2$

② $\sqrt{\ldots}$ se è definita è $\geq 0$

$\Rightarrow$ 2° membro $x+1>0$

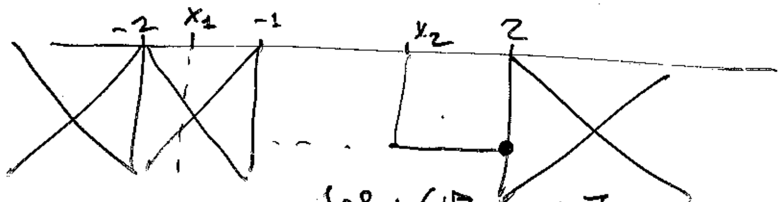
③ $\sqrt{\ } \geq 0$, $x+1 \geq 0$. Se $0<a<b \iff a^2<b^2$ $(0<a<b)$ e quindi posso quadrare

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x > -1 \\ 4-x^2 < (x+1)^2 \iff 2x^2+2x-3>0 \end{cases}$$

$$2x^2+2x-3=0 \iff x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+6}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$$

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x > -1 \\ x < \frac{-1-\sqrt{7}}{2} \quad \text{o} \quad x > \frac{-1+\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

$\vee$ $-2$ $\qquad$ $\wedge$ $2$

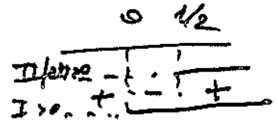



Sol: $\left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}, 2\right]$.



$\sqrt{2x^2-x} > 3x+4$

① I.D. $2x^2-x \geq 0$ $\qquad$ $x(2x-1) \geq 0$




$\iff x \leq 0$ oppure $x \geq 1/2$

② se $3x+4<0$, visto che $\sqrt{2x^2-x} \geq 0$ sull'I.D. la diseq. è vera

su $(-\infty, 0]$ ho che la diseq è certamente vera se $x \leq -4/3$

③ se $x \in (-4/3, 0]$ oppure $x \in [1/2, +\infty)$ entrambi i membri sono $\geq 0$

Posso quadrare

$$2x^2-x > 9x^2+24x+16 \iff$$

$$7x^2+25x+16<0$$

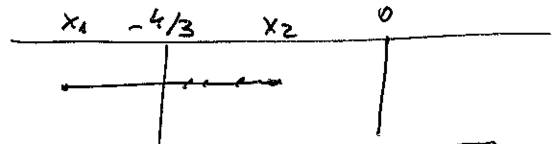
Risolvo $7x^2+25x+16=0$

$$x_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2-28\cdot 16}}{14} = \frac{-25\pm\sqrt{625-448}}{14}$$

$$= \frac{-25\pm\sqrt{177}}{14} \qquad \frac{-25-\sqrt{177}}{14} < -2$$

escludere

$$\frac{-25+\sqrt{177}}{14} \in (-4/3, 0]$$




Sol: $\left(-4/3, \frac{\sqrt{177}-25}{14}\right)$

UNISCO LE SOL.: $\left(-\infty, \frac{\sqrt{177}-25}{14}\right)$

(5)

$x\sqrt{3-2x} \leq 1$

Sol. definitiva: $(-\infty, 3/2]$.

Esame delle situazioni:

(1) I.D. $3-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3/2$

(2) $x \cdot \sqrt{\ }$ : se $x<0$, $\sqrt{\ }$ è definita e quindi $\geq 0$ : il prodotto dei due è $\leq 0$ e quindi è $<1$

Sicuramente $(-\infty, 0]$ fa parte delle soluzioni

(3) Resta da esaminare $(0, 3/2]$

Ho due membri entrambi $\geq 0$ : quadro!

$x^2(3-2x)-1 \leq 0$

$2x^3-3x^2+1 \geq 0$

L'eq. $2x^3-3x^2+1=0$ ha sicuramente sol $x=1$. Scompongo con la regola di Ruffini $2x^3-3x^2+1 = (x-1)(2x^2-x-1) =$

$= (x-1)^2(2x+1)$

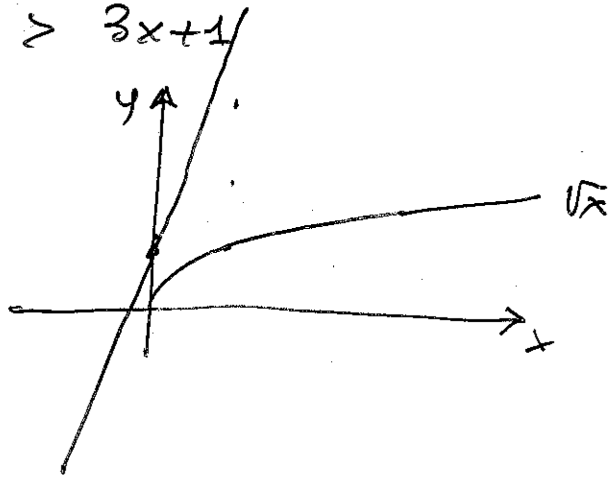
| | 2 | -3 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | -1 | -1 |
| | 2 | -1 | -1 | 0 ← resto |
| 1 | | 2 | 1 | |
| | 2 | 1 | 0 | |

$(x-1)^2 \geq 0$ sempre, $(2x+1) \geq 0$ in $(0, 3/2]$

$\Rightarrow 2x^3-3x^2+1 \geq 0$ in $(0, 3/2]$

(6)

$\sqrt{x} > 3x+1$ $\emptyset$.




$\sqrt{(x+1)(x+2)} \geq x$ Cercare di orientarsi con i grafici

7) Dimostro che $\left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\} \to 1$ usando la definizione di limite. [VEDI 27/10/2010]

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \quad$ t.c. $\forall n \geq k$ si ha

$$\left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

$\Updownarrow$

$$\left| \frac{-2}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$\Updownarrow$

$n+1>0$

$$\boxed{-\varepsilon < 0 <} \frac{2}{n+1} < \varepsilon$$

posso trascurarlo

$\Updownarrow$ $n+1>0$ !! $\varepsilon > 0$

$$\frac{2}{\varepsilon} < n+1$$

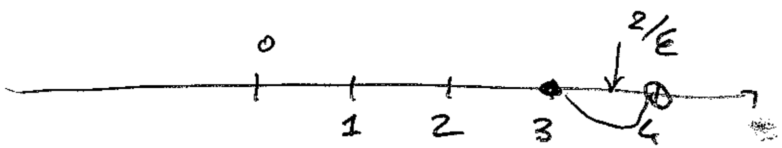
$\Updownarrow$

$$n > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \quad ; \quad k = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

parte intera

ad es. $\varepsilon = 10^{-6}$ : $n > \frac{2}{10^{-6}} - 1 = 2.000.000 - 1$

$k = 2.000.000$



ogni numero reale $\frac{2}{\varepsilon}$ cade in un intervallo di estremi interi

$\left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor =$ < il numero se è intero; il più grande intero $< 2/\varepsilon$



Ogni successione convergente è limitata !!

per definizione di successione convergente so che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \mid \forall n \geq k$ risulta

$$l - \varepsilon \leq a_n < l + \varepsilon$$

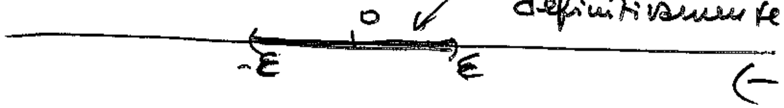
$\max\{a_0, a_1, \dots a_{k-1}\} = M$

$\min\{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\} = m$

cerco chi è più piccolo tra $m$ e $l-\varepsilon$ : $\alpha$ e chi è più grande tra $l+\varepsilon$ e $M$ : $\beta$

Ovviamente succede che $\forall a_n \in$ successione risulta

$$\boxed{\alpha \leq a_n \leq \beta}$$ succ. limitata!




convergente a zero significa definitivamente in questo intervallo $(-\varepsilon, \varepsilon)$

diverg. a $-\infty$: definitivamente qui


div. a $+\infty$: definitivamente qui

illimitata inferiormente

è illimitata superiormente

---

$$\{(-2)^n\} = \{1, -2, 4, -8, 16, \dots\}$$

è prodotto di $\{(2^n)\}$ che è divergente a $+\infty$ e della succ. irregolare $\{(-1)^n\}$

è preferibile pensarla come succ. irregolare.

---

Succ. irregolare: non converge né diverge.

$\{(-1)^n\}$ è irregolare

- non diverge perché è limitata
- non converge. Supponete che tenda a $\ell$.

$\forall \varepsilon \ \exists k \mid \forall n \geq k$

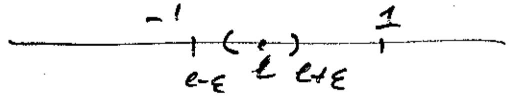
$$\ell-\varepsilon < (-1)^n < \ell+\varepsilon$$

$\boxed{\varepsilon < 1}$

prendo $\ell \geq 1$ $\quad 1 < 1-\varepsilon \leq \ell-\varepsilon < (-1)^n \dots \ \forall n$ $\quad$ impossibile per n dispari

" $\ell \leq -1$ $\quad (-1)^n < \ell+\varepsilon \leq -1+\varepsilon < 0$ $\quad$ impossibile per n pari

prendo $-1 < \ell < 1$




$\varepsilon$ t.c. $\quad \ell-\varepsilon > -1$

$\ell-\varepsilon < 1$

vedo che $\ell$ non può essere il limite