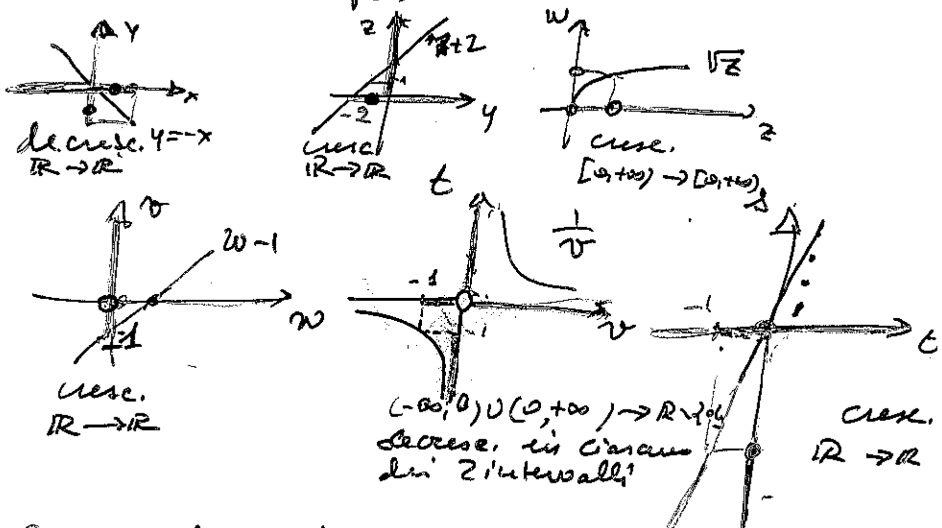
ESERCIZIO A RICHIESTA (1)

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{2-x} - 1}$$: dove è invertibile? e calcolo inversa

$$x \xrightarrow{-()} -x \xrightarrow{()+2} 2-x \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{2-x} \xrightarrow{()-1} \sqrt{2-x}-1 \xrightarrow{1/()} \frac{1}{\sqrt{2-x}-1} \xrightarrow{()4} f(x)$$



Ci sono due intervalli di definizione, come si vede anche studiando in blocco il D.

$$\begin{cases} \sqrt{2-x} - 1 \neq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2-x \neq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \quad x \neq 1 \quad : (-\infty, 1) \cup (1, 2]$$

su $(-\infty, 1)$ la funzione è crescente e ha immagine $(0,+\infty)$

su $(1,2]$ " è crescente e ha immagine $(-\infty,-4]$

$x=3/2$

$$f(3/2) = \frac{4}{\sqrt{2-3/2} - 1} = \frac{4}{\sqrt{1/2} - 1} \cong \frac{4}{0{,}7\ldots - 1} \cong -\frac{4}{0{,}3}$$

$$x = 9/8 \quad f(9/8) = \frac{4}{\sqrt{7/8} - 1} < f(3/2)$$

(2)

Invertibile su ciascuno dei 2 intervalli $x \in (-\infty, 1)$ e $x \in (1, 2]$

$$y = \frac{4}{\sqrt{2-x} - 1}$$

$$\sqrt{2-x} - 1 = \frac{4}{y} \xRightarrow{y \neq 0} \sqrt{2-x} = 1 + \frac{4}{y}$$

$$\Rightarrow 2-x = \left(1+\frac{4}{y}\right)^2 = x = 2 - \left(1 + \frac{4}{y}\right)^2$$

$y \in (0, +\infty)$ $\quad$ $y \in (-\infty, -4]$

La legge che definisce la funzione inversa è

$$f^{-1}(y) = 2 - \left(1 + \frac{4}{y}\right)^2$$

Le funzioni sono 2: una definita da questa legge su $(0,+\infty)$, l'altra su $(-\infty, -4]$

Successioni

$\{a_n\} \to l$: convergenti sono limitate

$\{a_n\} \to +\infty$: sono superiormente illimitate: $\sup\{a_n\} = +\infty$

$\{a_n\} \to -\infty$: sono inferiormente illimitate: $\inf\{a_n\} = -\infty$

---

irregolari : non convergono, non divergono a $+\infty$ né a $-\infty$

$\{(-1)^n\}$; $\{(-2)^n\}$

limitata ; superiormente e inf. illimitata

$\{2^0, -1, 2^2, -1, 2^4, -1, \dots\}$ inf. limitata sup. illimitata

. - -

Monotonia delle s.a.

$\{a_n\}$ è monotona strett. crescente se $\forall n, m \in \mathbb{N}$ se $m < n$ allora $a_m < a_n$.

Equivalentemente:

$\{a_n\}$ è monotona (strett.) crescente se $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n < a_{n+1}$

Infatti

- se $\forall n, m \in \mathbb{N}$ con $m < n$ allora $a_m < a_n$

  e prendo $\forall k \in \mathbb{N}$: $m = k$ e $n = k+1$

  $(k < k+1) \Rightarrow a_k < a_{k+1}$

  (cioè I $\Rightarrow$ II)

- se $\forall n \in \mathbb{N}$ si abbia $a_n < a_{n+1}$

  prendo l, m con $l < m$ $(m = l + h)$

$$a_l < a_{l+1} < a_{(l+1)+1} = a_{l+2} < \dots < a_{l+h-1} < a_{l+h} = a_m$$

$\{a_n\}$ è monotona non decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \le a_{n+1}$

$\{a_n\}$ è monotona decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n > a_{n+1}$

$\{a_n\}$ è monotona non crescente se $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq a_{n+1}$

TEOREMA SUL CARATTERE DELLE SUCC. MONOTONE. Se $\{a_n\}$ è monotona non decrescente ha sicuramente limite: esso sarà il suo $\sup\{a_n\}$ numero $\in \mathbb{R}$ se la succ. cresc. / $+\infty$ se illimitata se $\{a_n\}$ è monotona non crescente ha limite che sarà il suo $\inf\{a_n\}$:

se $\{a_n\}$ non è inf. limitata $\inf\{a_n\}=-\infty$

è inf. limitata $\inf\{a_n\}\in\mathbb{R}$

Esempi

Succ. di termine generale $a_n=q^n$

$q\in\mathbb{R}$

se $q>1$ $\quad q^n\cdot q>q^n$: monotona crescente

è sup. lim? NO. Ha limite $+\infty$.

se $q=1$ $\quad 1^n=1$: successione costante (non. non decr.... ha lim.)

converge a 1

se $0<q<1$ $\quad q^n\cdot q<q^n$: monotona decr.

è inferiorm. limitata?

da zero, visto che tutte le potenze sono >0.

converge a un limite finito

$\inf q^n=0$

se $q=0$: succ. cost. $\Rightarrow$ limite esiste ed è 0

$-1<q<0$: converge a 0: poiché $\forall\varepsilon>0\ \exists k\mid \forall n\geq k$

$|q^n|=|q|^n<\varepsilon$ perché $0<|q|<1$

se $q=-1$: irregolare.

se $q<-1$: "

Altra interpretazione: se $-1<q<0$ $\quad q^n=(-1)^n\cdot|q|^n$

prodotto di $\{(-1)^n\}$: limitata per $\{|q|^n\}$ che tende a 0 e....

TEOREMA: Il prodotto di una succ. limitata per una che tende a 0, va a 0

Dim. $\{a_n\}$ sia la succ. che tende a 0

$\{b_n\}$ " " " limitata.

Cioè: $\forall\varepsilon>0\ \exists k$ t.c. $\forall n\geq k$ si ha

$$|a_n|<\varepsilon$$

e $\exists M\mid \forall n\in\mathbb{N}$ si ha $|b_n|<M$

Mostro che $\{a_nb_n\}$ converge a 0

cioè che $\forall\delta>0 (\delta\in\mathbb{R})\ \exists k$ t.c. $\forall n\geq k$ si abbia

$$|a_nb_n|<\delta$$

Infatti

$$|a_nb_n|=|a_n|\cdot|b_n| \quad \{b_n\} \text{ limitata}$$

$$<|a_n|\cdot M<\delta$$

succede se $|a_n|<\delta/M=\varepsilon$

in corrisp. a questo $\varepsilon=\delta/M$ scelgo k t.c. $\forall n\geq k$ risulti

$$|a_n|<\varepsilon$$

(posso farlo poiché $\{a_n\}\to 0$)

La successione

$$\left\{ \frac{\sin n}{n} \right\} \to 0 \quad \text{poiché}$$

$|\sin n| \leq 1$ cioè la succ. $\{\sin n\}$ è limitata e $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO. Sia $\{a_n\}$ una successione convergente a un numero a diverso da zero. Allora esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq k$ il segno di a_n sia lo stesso di quello di a.

Dimostrazione. $\{a_n\} \to a > 0$

$\varepsilon = \frac{a}{2}$. Visto che la succ. converge ad a $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ si abbia

$$0 < \frac{a}{2} = a - \frac{a}{2} < a_n < a + \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n > 0 \ \forall n \geq k.$$

Se $\{a_n\} \to a < 0$

$\{-a_n\} \to -a > 0 \quad \Rightarrow \exists k / \forall n \geq k$ risulti $-a_n > 0 \Rightarrow a_n < 0$

C.V.D.

Come sfruttare il teor. della perm. del segno?

Enunciandolo nella forma CONTRONOMINALE

$$Ip \Rightarrow TS$$

$$\text{non } TS \Rightarrow \text{non } Ip$$

Parto $\underbrace{\{a_n\} \to a > 0}_{Ip} \Rightarrow \underbrace{\exists k / \forall n \geq k : a_n > 0}_{TS}$

nego la TS:

$\forall n : a_n \leq 0 \quad \Rightarrow \quad a \leq 0$

$\{a_n\}$ converge ad a

Cioè se la succ. converge ed è formata da elementi tutti non positivi allora il limite è non positivo.

Nel caso $a < 0$ per contronominale trovo: se la succ. converge ed è formata da elem. tutti non negativi allora il limite è non negativo

Es. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$: $\frac{1}{n} > 0$ $\forall n$ ma il limite a è 0.

TEOR. di CONFRONTO

$\{a_n\} \to l$; $\{c_n\} \to l$; $\{b_n\}$ con la proprietà che $\forall n \in \mathbb{N}$ si abbia

$$\boxed{a_n \leq b_n \leq c_n}$$

Allora $\{b_n\}$ converge a l.

Dim.

$\{a_n\} \to l$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_a$ t.c. se $n > k_a$ si abbia $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

$\{c_n\} \to l$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_c$ t.c. se $n > k_c$ si abbia $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$

$$l - \varepsilon \underset{n > k_a}{<} a_n \leq b_n \leq c_n \underset{n > k_c}{<} l + \varepsilon$$

se prendo $k = \max(k_a, k_c)$ valgono entrambe le disuguaglianze e quindi
$\forall \varepsilon > 0$ vedo che $\exists k$ t.c. $\forall n > k$:

$$l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$$

cioè $\{b_n\} \to l$

C.V.D

commenti sull'aritmetica delle successioni

$b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\{b_n\} \to 0$?

$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$ pur di prendere $n > k$ opportuno

$$\Updownarrow$$

$$\frac{|(-1)^n|}{|n|} < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ ok.

$\frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$ perché? $(-1)^n (-1)^n = (-1)^{2n} = 1$

$a_n = 1$

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\frac{(-1)^n}{n}} = (-1)^n \cdot n$ è irregolare

Quando il denominatore tende a 0 il limite del rapporto può:

non esistere (caso precedente)

oppure essere $+\infty$ ($\{1/(1/n)\} \to +\infty$)

oppure essere $-\infty$ ($\{1/(-1/n)\} \to -\infty$)

oppure essere un numero finito ($\{0/(1/n)\} = \{0 \cdot n\} = \{0\} \to 0$; $\{(2/n)/(1/n)\} = \{2\} \to 2$)