(I)

1) se $\{a_n\} \to a$ e $\{b_n\} \to b$ allora

$$\{a_n b_n\} \to \{ab\}$$

perché una succ. prodotto sia convergente è necessario che entrambi i fattori lo siano? <u>NO</u>

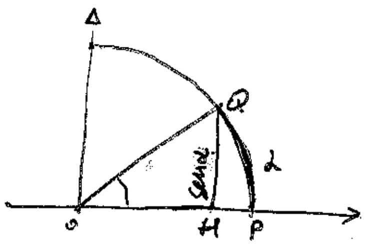
Se $\{\operatorname{sen} n\} = \{a_n\}$ $\quad \{\frac{1}{n}\} = \{b_n\}$

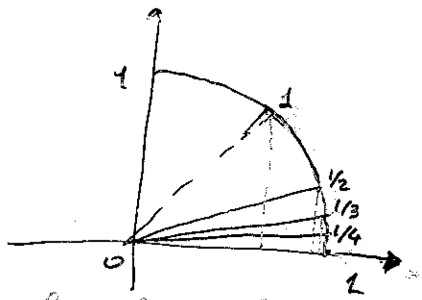
$$\left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\} \to 0 \quad \text{converge}$$

ma $\{\operatorname{sen} n\}$ non converge né diverge. (però è limitata)

Le condizioni aritmetiche di convergenza sono SUFFICIENTI ma non sempre necessarie.

Oss. 1. La succ. $\operatorname{sen} \frac{1}{n}$ converge a 0





per cui quindi la lunghezza di QH quasi coincide con la lunghezza di QP

(II)

$\{\cos \frac{1}{n}\}$?

$\frac{1}{n} > 0$

$$\cos^2 \frac{1}{n} + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{n} = 1 \quad \downarrow \quad \cos \frac{1}{n} = \sqrt{1 - (\operatorname{sen} \frac{1}{n})^2}$$

applichiamo le prop. aritmetiche criteri

$$\{\operatorname{sen} \tfrac{1}{n}\} \to 0$$

$$\{(\operatorname{sen} \tfrac{1}{n})(\operatorname{sen} \tfrac{1}{n})\} \to 0 \cdot 0 = 0$$

$$\{1 - (\operatorname{sen} \tfrac{1}{n})^2\} \to 1 - 0 = 1$$

$$\{(1 - (\operatorname{sen} \tfrac{1}{n})^2)^{1/2}\} \to 1^{1/2} = 1$$

il discorso vale in generale $\forall$ succ.

$\{a_n\} \to 0$:

$$\{\operatorname{sen} a_n\} \to 0$$

$$\{\cos a_n\} \to 1$$

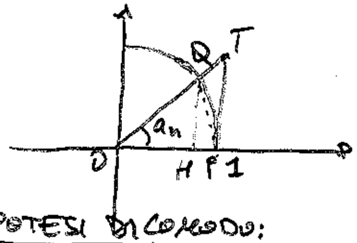
e quindi

$$\{tg\, a_n\} = \left\{\frac{\operatorname{sen} a_n}{\cos a_n}\right\} \to \frac{0}{1} = 0$$

O.K. posso applicare la regola del quoz.

$$\left\{ \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right\} \longrightarrow 1$$

(in generale se $\{a_n\} \to 0$ $\left\{\frac{\sin a_n}{a_n}\right\} \to 1$)



IPOTESI DI COMODO: $\boxed{\frac{\pi}{2} > a_n > 0}$

$$\overline{QH} \le \boxed{\overline{QP}} \le \widehat{QP} \le \overline{TP}$$

$$\sin a_n \le a_n \le \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$$

$\sin a_n > 0$ divido per $\sin a_n$

$$1 \le \frac{a_n}{\sin a_n} \le \frac{1}{\cos a_n}$$

e quindi

$$1 \ge \frac{\sin a_n}{a_n} \ge \cos a_n$$

se $n \to +\infty$ $\boxed{\{a_n\} \to 0} \Rightarrow \{\cos a_n\} \to 1$

Teorema del confronto $\Longrightarrow \left\{\frac{\sin a_n}{a_n}\right\} \to 1$

se $a_n \neq 0$ ma $\{a_n\} \to 0$ se $n \to +\infty$

$$\frac{\sin a_n}{a_n} = \begin{cases} a_n > 0 : & \frac{\sin a_n}{a_n} \\ a_n < 0 : & \frac{\sin(-|a_n|)}{-|a_n|} = \frac{-\sin|a_n|}{-|a_n|} = \frac{\sin|a_n|}{|a_n|} \end{cases}$$

mi riconduco sempre al caso:

quindi il limite è sempre 1

esempi banali che giustificano che $[\infty - \infty]$ è una forma di indecisione e che quindi bisogna studiare caso per caso che cosa succede.

$\{n^2\}$, $\{-n\}$; $\{n^2\} \to +\infty$, $\{-n\} \to -\infty$

$\{n^2 + (-n)\} = \{n(n-1)\} \to +\infty$ ($n \to +\infty$, $n-1 \to +\infty$)

$\{-n^2\}$, $\{n\}$; $\{-n^2\} \to -\infty$, $\{n\} \to +\infty$

$\{n + (-n^2)\} = \{n(1-n)\} \to -\infty$ ($+\infty \cdot -\infty$)

$\{n\}$, $\{2-n\}$; $\{n\} \to +\infty$, $\{2-n\} \to -\infty$

$\{n + (2-n)\} \longrightarrow 2$

$\{n\}$, $\{-n\}$; $\{n\} \to +\infty$, $\{-n\} \to -\infty$

$\{n + (-n)\} \longrightarrow 0$

---

sulla differenza di succ. divergenti:

$(+\infty) - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) - (+\infty) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$(+\infty) - (+\infty)$ F.I. $\quad +\infty - \infty$

$(-\infty) - (-\infty)$ F.I. $\quad -\infty + \infty$ sono la stessa cosa

è un'unica forma di indecisione:

$$[\infty - \infty]$$

Esempio significativo di forma di indecisione $[0\cdot\infty]$

$$\left\{n \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right\} \longrightarrow 1$$

Esempi banali

$\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0 \quad \{n^2\} \to +\infty \quad : \quad \left\{\frac{1}{n}\cdot n^2\right\} \to +\infty$

$\left\{-\frac{1}{n}\right\} \to 0 \quad \{n^2\} \to +\infty \quad : \quad \left\{-\frac{1}{n}\cdot n^2\right\} \to -\infty$

$\left\{\frac{1}{n^2}\right\} \to 0 \quad \{n\} \to +\infty \quad : \quad \left\{\frac{1}{n^2}\cdot n\right\} \to 0$

Dico che la succ. $\{a_n\}$ tende ad $\underline{a}$ dalla destra e scrivo

$$\{a_n\} \longrightarrow a^+$$

se $\{a_n\} \to a$ e tutti gli a_n sono $\geq a$, almeno per $n \geq k$ opportuno

cioè se

$\forall \varepsilon > 0$ esiste un $k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ si abbia

$$a \leq a_n < a+\varepsilon$$

Simmetricamente

$$\{a_n\} \longrightarrow a^- \ \ldots\ldots \ \boxed{a-\varepsilon < a_n \leq a}$$

$\{b_n\} \longrightarrow 0^+ \quad \Longrightarrow \quad \left\{\frac{1}{b_n}\right\} \to +\infty$

$\{b_n\} \longrightarrow 0^- \quad \Longrightarrow \quad \left\{\frac{1}{b_n}\right\} \to -\infty$

$\{a_n\} \to a \neq 0$ oppure $\pm\infty$

e $\{b_n\} \to 0^+$

$\Longrightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$

ci si riconduce al prodotto di una divergente per una divergente o una convergente ad $a \neq 0$

(aritmetica dei segni)

$\{a_n\} \to a$ finito $\quad \{b_n\} \to \pm\infty$

$\Longrightarrow \quad \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to 0$

Problemi:

$\{a_n\} \to 0 \quad \{b_n\} \to 0$?

$\{a_n\} \to \pm\infty \quad \{b_n\} \to \pm\infty$

$\left[\frac{0}{0}\right] \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \qquad$ Forme di indecisione del rapporto

Esempi si ritrovano leggendo diversamente quelli dati per il prodotto.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2-3n+1}{n^2-6n} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}\,2\left(1-\frac{3n}{2n^2}+\frac{1}{2n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1-\frac{6n}{n^2}\right)} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\left(1-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)}{1-\frac{6}{n}} = \frac{2\cdot 1}{1} = 2$$

$$\left\{1-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right\} \longrightarrow 1-0+0=1$$

$$\left\{1-\frac{6}{n}\right\} \to 1-0=1$$

cioè è come se trascurassimo gli infiniti di ordine inferiore

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2-3n+1}{n^2-6n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} = 2$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3-n+\sqrt{2}}{-n^2+n+1} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^{\cancel{3}}\underbrace{\left(1-\frac{1}{2n^2}+\frac{\sqrt{2}}{2n^3}\right)}_{\to 1}}{-\cancel{n^2}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}_{\to 1}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{-1} = -\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2n^2-n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n^2} = 0^+$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\underbrace{n^{3/2}}_{\to+\infty}-\underbrace{n^{-7/2}}_{\to 0}+\underbrace{n^{-1}}_{\to 0}+1}{\underbrace{n^{-5/2}}_{\to 0}+\underbrace{n^2}_{\to+\infty}+5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^{3/2}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2n^{3/2}}-\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^{5/2}}\right)}_{\to 1}}{n^2\underbrace{\left(1+\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^{9/2}}\right)}_{\to 1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^{1/2}} = 0$$

Infiniti - infinitesimi e ordine di infinito - infinitesimo.

Def: dico che la succ. $\{a_n\}$ è un INFINITO se diverge (a $+\infty$ oppure a $-\infty$)

dico che la succ. $\{a_n\}$ è un INFINITESIMO se converge a 0

Supponiamo di avere due succ. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ che tendono a $+\infty$ e considero la succ. $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$

(IX)

se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$ dirò che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno lo stesso ordine di infinito

se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ dirò che $\{a_n\}$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $\{b_n\}$

se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ dirò che $\{a_n\}$ è un infinito di ordine superiore risp. a $\{b_n\}$

se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ non esiste dico che non sono confrontabili

diamo l'esempio nel caso infinitesimo / infinito

Supponiamo $\{a_n\} \to 0$, $\{b_n\} \to 0$

se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$ dico che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno lo stesso ordine di infinitesimo

(ad es. $1/n$ e $\sin 1/n$)

se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ dirò che $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\{b_n\}$

se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ord. inferiore rispetto a $\{b_n\}$

(X)

se il limite $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ non esiste dico che i due infinitesimi non sono confrontabili

esempio $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\} \to 0$ $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$ non sono confrontabili poiché:

$$\frac{\frac{\sin n}{n}}{\frac{1}{n}} = \sin n$$ che non ha limite

Per i lucidi già preconfezionati, vedi slides

28/10/2010 pag 3

29/10/2010 pag 1