(1)

$$\{a_n\} \to 0^+ \overset{c>1}{\Longrightarrow} \{\log_c a_n\} \to -\infty$$

posso provarlo ricordando che:

$$\{b_n\} \to +\infty \overset{c>1}{\Longrightarrow} \{\log_c b_n\} \to +\infty$$

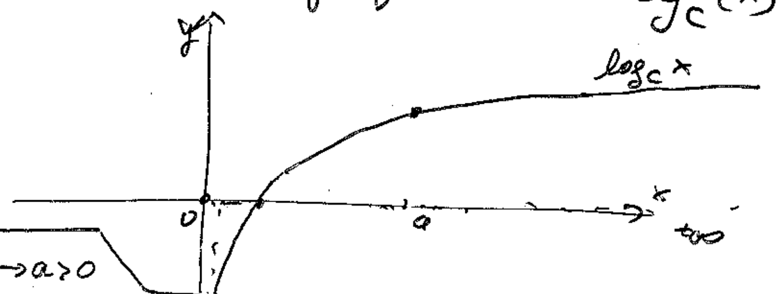
Infatti se $\{a_n\} \to 0^+$ allora la succ. $\{b_n\}$ con $b_n = \frac{1}{a_n}$ tende a $+\infty$

$$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} \to +\infty \overset{c>1}{\Longrightarrow} \left\{\log_c \frac{1}{a_n}\right\} \to +\infty$$

$$\text{''} \quad \{-\log_c a_n\} \to +\infty$$

$\Longrightarrow$ la sua opposta $\{\log_c a_n\} \to -\infty$

Queste informazioni(*) sono tutte racchiuse nel grafico del $\log_c(x)$



(*) $\{a_n\} \to a > 0$
$\Rightarrow \{\log_c a_n\} \to \log_c a$

$\{a_n\} \to +\infty \Rightarrow \{\log_c a_n\} \to +\infty$

$\{a_n\} \to 0+ \Rightarrow \{\log_c a_n\} \to -\infty$

(2)

$$\left\{\log_{10} \frac{1}{n}\right\} \xrightarrow{n \to +\infty} -\infty$$

$$\{a_n\} = \left\{\log_{10}\left(\frac{n^2+3n}{2n^2-1}\right)\right\} \longrightarrow ?$$

$$\left\{\frac{n^2+3n}{2n^2-1}\right\} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \{a_n\} \to \log_{10}\frac{1}{2} = -\log_{10} 2.$$

$\{a_n\} = \{\log_2(n^3-n) - \log_2(n^2+2n)\}$ presenta una forma di indecisione $[\infty-\infty]$ si risolve usando le proprietà dei logaritmi:

$$\{a_n\} = \Big\{\log_2 \underbrace{\left(\frac{n^3-n}{n^2+2n}\right)}_{\to +\infty}\Big\} \longrightarrow +\infty$$

Altri esempi fondamentali di $[\infty-\infty]$

Differenza di radicali.

$\{\sqrt{n^2-2n} - \sqrt{n}\}$: presenta la f.i. $[\infty-\infty]$

$$\sqrt{n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)} - \sqrt{n} = |n|\sqrt{1-2/n} - \sqrt{n} = n\sqrt{1-2/n} - \sqrt{n} =$$

$$= n\left(\sqrt{1-\frac{2}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad : \{a_n\} \to +\infty$$

$$\sqrt{1-\frac{2}{n}} \to 0,\ \to 1 \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \qquad 1 \to 1$$

questo succede perché i due radicali hanno ordine di infinito diverso: uno $\sqrt{n^2} = n$, l'altro $\sqrt{n} = n^{1/2}$ e prevale l'∞ di ordine superiore

---

$$\{a_n\} = \left\{ \sqrt{2n^2 - n} - \sqrt{3n^2+1} \right\} : [\infty - \infty]$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{2n^2 - n}}{\sqrt{2n^2}} \right\} \to 1$$

lo vedo scomponendo il numeratore: $\sqrt{2n^2} \cdot \sqrt{1 - 1/2n}$

$\Rightarrow \sqrt{3n^2+1}$ ha lo stesso ordine di grandezza di $\sqrt{3n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2}\cdot|n| - \sqrt{3}\,|n| = \quad |n| = n \text{ poiché } n>0$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot n = -\infty$$

questo succede in quanto l'ordine di ∞ è lo stesso ma i coefficienti coinvolti sono diversi

$$\{a_n\} = \left\{ \sqrt{3n^2 - 2n} - \sqrt{3n^2+1} \right\} : [\infty - \infty]$$

questo è una forma di indecisione SERIA

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Cerco di ricondurre } [\infty - \infty] \text{ a } [\infty + \infty] \\ \text{attraverso} \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \Rightarrow \\ a - b = \dfrac{a^2-b^2}{a+b}\end{array}}$$

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{3n^2-2n} - \sqrt{3n^2+1}\right)\left(\sqrt{3n^2-2n} + \sqrt{3n^2+1}\right)}{\sqrt{3n^2-2n} + \sqrt{3n^2+1}} =$$

$$= \frac{(3n^2-2n) - (3n^2+1)}{\sqrt{3n^2-2n} + \sqrt{3n^2+1}} =$$

$$= \frac{-2n-1}{\sqrt{3n^2}\left(\sqrt{1-\frac{2}{3n}} + \sqrt{1+\frac{1}{3n^2}}\right)} = \qquad \sqrt{n^2} = |n| = n$$

$$= \frac{-2n-1}{n\sqrt{3}\left(\underbrace{\sqrt{1-\frac{2}{3n}}}_{\to 1} + \underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{3n^2}}}_{\to 1}\right)} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n-1}{2\cdot\sqrt{3}\cdot n} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$a_n = \sqrt{n^3-n} - \sqrt{n^3+1} \quad : \quad [\infty - \infty]$$

cure = ordine di ∞
e = coefficienti

$$a_n = \frac{\cancel{n^3}-n-\cancel{n^3}-1}{\sqrt{n^3-n}+\sqrt{n^3+1}} =$$

$$= \frac{-n-1}{\sqrt{n^3}\left(\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}_{\downarrow\, 1}+\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}_{\downarrow\, 1}\right)} \Longrightarrow$$

il limite della somma dei due radicali è 2

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n-1}{2\cdot n^{3/2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{2n^{3/2}} =$$

$$= 0$$

$$a_n = \sqrt[3]{n^3-n} - \sqrt[3]{n^3+1} \quad : \quad [\infty-\infty]$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a_n = \frac{(\sqrt[3]{n^3-n})^3 - (\sqrt[3]{n^3+1})^3}{(\sqrt[3]{n^3-n})^2+(\sqrt[3]{n^3-n})(\sqrt[3]{n^3+1})+(\sqrt[3]{n^3+1})^2} =$$

$$= \frac{\cancel{n^3}-n-\cancel{n^3}-1}{n^2\left(\underbrace{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2}}_{\downarrow\,1}+\underbrace{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}}_{\downarrow\,1}+\underbrace{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^2}}_{\downarrow\,1}\right)}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

il limite della somma dei tre radicali è 3.

SUCCESSIONI ESPONENZIALI. Osservo che:

$$a_n^{b_n} = c^x \qquad \text{qual è } x\,?$$

$$\log_c a_n^{b_n} = \log_c c^x = x$$

$$\parallel$$

$$b_n \log_c a_n$$

$$\Longrightarrow \quad a_n^{b_n} = c^{b_n \log_c a_n}$$

$a_n > 0$
$c > 1$

Che cosa succede della succ.

$$\{c^{A_n}\}, \quad c>1$$

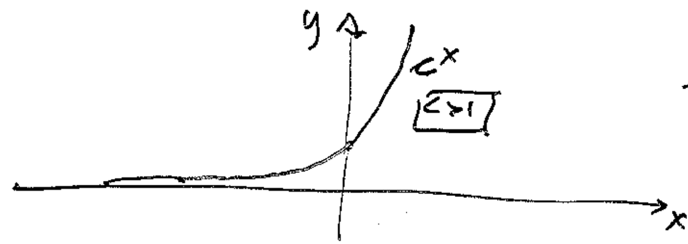
al tendere di $\{A_n\}$ a a, $+\infty$, $-\infty$?

$\{A_n\} \to a \quad \Longrightarrow \quad \{c^{A_n}\} \to c^a$

(con la def. di limite)

$\{A_n\} \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad \{c^{A_n}\} \longrightarrow +\infty$

$\{A_n\} \to -\infty \quad \Longrightarrow \quad \{c^{A_n}\} \longrightarrow 0^+$



queste informazioni si leggono sul grafico di c^x (con $c>1$)

Quali forme di indecisione? Come visto a inizio pagina:

$a_n^{b_n} = c^{b_n \log_c a_n}$

Quindi la successione esponenziale $\{a_n^{b_n}\}$ ha forme di indecisione se l'esponente (che è un prodotto) le ha, cioè se l'esp. è della forma $[0 \cdot \infty]$

$\{b_n\} \to 0$ e $\{a_n\} \to +\infty$ e quindi $\{\log_c a_n\} \to +\infty$

$[0 \cdot (+\infty)]$

$\{b_n\} \to 0$ e $\{a_n\} \to 0^+$ e quindi $\{\log_c a_n\} \to -\infty$

$[0 \cdot (-\infty)]$

$\{b_n\} \to \pm\infty$ e $\{\log_c a_n\} \to 0 \Rightarrow \{a_n\} \to 1$ e allora

$[\pm\infty \cdot 0]$

$\Rightarrow$ le forme di indecisione per le succ potenza sono:

$[\infty^0]$, $[0^0]$, $[1^\infty]$

Esempi $\{(2^{n^2})^{1/n}\}$: $[\infty^0]$

$\| $

$\{2^n\} \to +\infty$, ma:

$\{(2^n)^{1/n^2}\}$: $[\infty^0]$

$\|$

$\{2^{1/n}\} \to 2^0 = 1$; inoltre:

$\{(2^{2n})^{\frac{1}{n-1}}\}$: $[\infty^0]$

$\|$

$\{2^{\frac{2n}{n-1}}\} \longrightarrow 2^2 = 4$; e d'altra parte:

$\{(2^{n^2})^{\frac{-1}{n}}\}$: $[\infty^0]$

$\|$

$\{2^{-n}\} \longrightarrow 0^+$

Se invece di base 2 prendo base $\frac{1}{2}$ in ciascuno degli es. precedenti ho esempi di $[0^0]$.

Esempi di

$[1^\infty]$?? : $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$

Successione di NEPERO

il limite è detto numero di Nepero ed è denotato con la lettera $\boxed{e}$

Teorema: la succ. $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ è convergente e il suo limite e è compreso tra 2 e 3

(... $e = 2.718291824 \ldots$ è irrazionale trascendente)

Dimostrazione: Verifico che $\{a_n\}$ con $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ è monotona crescente

$\{b_n\}$ con $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ è monotona decrescente

$\boxed{1^a \text{ tesi}}$

a_n è monotona crescente cioè $\forall n > 1$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \Big/ \left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

cioè

$$\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

cioè

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

questa è la riformulazione della tesi.

per dimostrarla serve la:

Disuguaglianza di Bernoulli. Se $\boxed{a > -1}$

$$\boxed{(1+a)^n \geq 1+na}$$

Infatti:

$n = 1$ $\quad (1+a)^1 \geq 1+1\cdot a = 1+a$ vale $=$

$n = 2$ $\quad (1+a)^2 = 1+2a+\underset{\geq 0}{a^2} \geq 1+2a$

$n = 3$ $\quad (1+a)^3 = (1+a)\underbrace{(1+a)^2}_{\geq 0} \geq$

$= (1+a)(1+2a) =$

$= 1+a+2a+\underline{\underline{2a^2}} \geq 1+3a$

In generale se ho provato che

$$(1+a)^k \geq 1+ka$$

allora verifico che

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$$

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)(1+a)^k \geq (1+a)(1+ka) =$$

$$= 1+(k+1)a+ka^2 \geq$$

$$\geq 1+(k+1)a$$

$\Rightarrow$ per induzione posso dire che la formula è vera.

$\boxed{\text{c.v.d. sulla disug.}}$

Voglio provare che, $\forall n>1$:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

Ora se nella disug. di Bernoulli pongo $a=-\frac{1}{n^2}$ (si osservi che $-\frac{1}{n^2}>-1$ se $n>1$) ho:

$$\left(1+\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right)^n \geq 1+n\left(-\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{1}{n} \quad !!!$$

ho provato la monotonia (cresc.) di $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ (C.V.D. 1ª TS)

Posso analogamente mostrare che è decresc la succ. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ cioè

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

cioè

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{1}{n} \quad \boxed{2^a TS}$$

dis. di Bernoulli:

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{1}{n^2-1} \geq 1+\frac{n}{n^2}=1+\frac{1}{n}$$

C.V.D. (2ª TS)

Abbiamo dimostrato che

$\{a_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ è monotona cresc.

$\{b_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ è mon. decresc

Inoltre $\forall\, n,m$ si ha

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

(cioè $a_n \leq b_m$)

perché: se $n=m$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

se $n<m$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{\{a_n\}\text{ cresc.}}{<} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

se $n>m$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \underset{\{b_n\}\text{ decr.}}{\leq} \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

(i due insiemi $\{a_n\}$ e $\{b_m\}$ sono separati)

$\{a_n\}$ è superiormente limitata da $b_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1}=4$ e, visto è monotona crescente, converge a un limite ℓ;

13) $\{b_n\}$ è inf. limitata da $a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$
e, visto che è decres., converge a un limite L

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

ma $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{e}{L}$ $\Rightarrow L = e$

$\boxed{L = e}$ è il limite delle 2 successioni e si ha che $a_1 \leq a_n < e < b_m \leq b_1 \Rightarrow 2<e<4$

o meglio:

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

< 3 per quali m?

m	$(1+1/m)^{m+1}$
1	4
2	$(3/2)^3 = 27/8 = 3{,}375$
3	$(4/3)^4 = 256/81 = 3{,}1\ldots$
4	$(5/4)^5 = 3125/1024 = 3{,}05\ldots$
5	$(6/5)^6 = (1{,}2)^6 = (1.44)^3 < 2{,}986$

$\Rightarrow m \geq 6$ realizza la condizione < 3