Riprendo la fine della dim. del fatto che $\{(1+1/n)^n\}$ converge a un limite finito che diciamo e (ed è compreso tra 2 e 3)

I) TS 1ª: $\{(1+1/n)^n\}$ è monotona crescente

TS 2ª: $\{(1+1/n)^{n+1}\}$ " " decrescente

II) $\forall n, m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1} = 4$$

1ª) $\Rightarrow$ la succ. $\{(1+1/n)^n\}$ è sup. limitata

$\Rightarrow$ tende a un limite finito

$$l = \sup_{n \in \mathbb{N}} (1+1/n)^n$$

2ª) $\Rightarrow$ la succ. $\{(1+1/m)^{m+1}\}$ è inf. limitata $\Rightarrow$ tende a un limite finito

$$L = \inf_{m \in \mathbb{N}} (1+1/m)^{m+1}$$

III) i due limiti l e L coincidono poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = l \cdot 1 = L$$

Chiamo e il limite $l = L$

Per quanto visto in II

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

queste 2 disuguaglianze forniscono approssimazioni per difetto e per eccesso del numero e

$n=1$ $\quad \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \Rightarrow 2 \leq e$

$m=1$ $\quad \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1} = 4$

$m=2$ $\quad \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 = 3.725$

$\vdots$

$m=5$ $\quad \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 = (1.2)^6 < 3$

le due succ. $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ e $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$ tendono a e MA MOLTO LENTAMENTE

Per calcolare effettivamente e si fa uso di SERIE NUMERICHE ... o di loro approssimazioni che arrivano dalle

formule di Taylor per la rappresentazione tramite polinomi di funz. trascendenti (e^x)

Permetterà in 5-6 passaggi di arrivare a $e \approx 2.718$.

Supponiamo di avere una succ. $\{a_n\}$ divergente: per comodità penso a $+\infty$, ma potrei ripetere per $\{a_n\} \to -\infty$

Qual è $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = ?$

Risposta: e.

Lo si vede usando il teor. del confronto
Considero
$\lfloor a_n \rfloor$ = parte intera di a_n, cioè il più grande intero $\leq a_n$

$a_n > 0 \Rightarrow \lfloor a_n \rfloor > 0$ (in quanto $a_n \to +\infty$) per n sufficientemente grande

$$\frac{1}{\lfloor a_n \rfloor + 1} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{\lfloor a_n \rfloor} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\lfloor a_n \rfloor + 1} < 1 + \frac{1}{a_n} < 1 + \frac{1}{\lfloor a_n \rfloor}$$

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{\lfloor a_n \rfloor} < \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{\lfloor a_n \rfloor + 1}$$

$$\vee \qquad\qquad\qquad \wedge$$

$$\left(1 + \frac{1}{\lfloor a_n \rfloor + 1}\right)^{\lfloor a_n \rfloor} \qquad \left(1 + \frac{1}{\lfloor a_n \rfloor}\right)^{\lfloor a_n \rfloor + 1}$$

sottosuccessioni di $\left\{\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m\right\}$ con $m \to +\infty$ e di $\left\{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}\right\}_{k \to +\infty}^{a_n}$

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} \to e$$

$$\left\{\frac{\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{1}{m+1}}\right\} \to e$$

$\therefore$ per T. Confr. anche $\left\{\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right\} \to e$

Esempi

$$\left\{\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^n\right\} \quad ? \quad : [1^\infty]$$

$$\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2} \cdot \frac{2}{n+1}}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n+1}}$$

se $\{a_n\} = \left\{\frac{n+1}{2}\right\} \to +\infty \quad \left\{\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right\} \to e$

dunque ho $\{b_n\} \to e$, $\{c_n\} = \left\{\frac{2n}{n+1}\right\} \to 2$ $\Rightarrow \{b_n^{c_n}\} \to e^2$

Oppure:

$$\left\{\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^n\right\} = \left\{\frac{\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+1}}{\boxed{\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)} \to 1}\right\} \to e^2$$

Vedo che non è importante considerare nella succ. $\{a_n\} \to +\infty$ i termini che sono infiniti di ordine inferiore a quello predominante oppure costanti oppure infinitesimi. Inoltre $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\left\{\left(1 + \frac{k}{a_n}\right)^{a_n}\right\} \longrightarrow e^k$$

poiché posso scrivere $\left\{\left(1 + \frac{k}{a_n}\right)^{a_n}\right\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{\frac{a_n}{k}}\right)^{\frac{a_n}{k} \cdot k}\right\} =$
$$= \left\{\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{a_n}{k}}\right)^{\frac{a_n}{k}}\right)^k\right\} \longrightarrow e^k$$

interesse annuo del 3% = 0,03

$\left(1+\frac{0.03}{n}\right)^n$ con $n=365$ dovrebbe ~~l'interesse~~ il coefficiente per cui moltiplicare il capitale per avere il totale applicando l'interesse composto calcolato giorno per giorno.

per eccesso faccio tendere n a $+\infty$ e vedo cosa viene il limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0{,}03}{n}\right)^n = e^{0{,}03} = 1{,}03\ldots$$

è quasi come calcolare il 3% annuo semplice. il coefficiente per cui moltiplicare il capitale nel caso in cui si applichi

---

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n^2+n} = [1^\infty]$$

come detto nell'es. precedente posso trascurare -1 al denominatore e n all'esponente in quanto costanti o ∞ di ord. $<$ ord n^2.

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{n^2}\right)^{n^2} = e^{-3}$$

Nella formula avevo $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{k}{a_n}\right)^{a_n} = e^k$

QUINDI ATTENZIONE AL SEGNO DEL COEFFICIENTE k.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^2} \underset{[1^\infty]}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right)^n = e^{-3\cdot(+\infty)}$$

$$= 0^+$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{n^2}\right)^n = [1^\infty]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{-3}{n^2}\right)^{n^2}}_{e^{-3}}\Bigg]^{1/n} = e^{-3\cdot 0} = 1^-$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2} = [1^\infty]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}_{e^3}\Bigg)^n = e^{3\cdot(+\infty)} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3-5n+1}{n^3+n^2-1}\right)^{n^3} = [1^\infty] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n\right)^{n^2} =$$

$$= e^{(-1)(+\infty)} = e^{-\infty} = 0^+$$

$$\frac{n^3-5n+1}{n^3+n^2-1} = \frac{(n^3+n^2-1)+(-n^2-5n+2)}{n^3+n^2-1} =$$

$$= 1+\frac{-n^2-5n+2}{n^3+n^2-1} \simeq 1+\frac{-n^2}{n^3} = 1+\frac{-1}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\underbrace{\frac{n^3 - 5n}{n^2 - 1}}_{\to +\infty} \right)^{n^3} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\underbrace{\frac{n^2 - 1}{n^3 - 5n}}_{\to 0^+} \right)^{n^3} = (0)^{+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

posso pensare alla succ $\{a_n^{b_n}\}$ come $\{e^{b_n \log_e a_n}\}$

$\{a_n\} \to 0^+ \Rightarrow \{\log_e a_n\} \to -\infty$

$\{b_n\} \to +\infty$

$\{b_n \log_e a_n\} \to -\infty \quad \Rightarrow \{a_n^{b_n}\} \to e^{-\infty} = 0$

ATTENZIONE ALLE FALSE FORME DI INDECISIONE

SIMBOLOGIA $\log_e a = \ln a$

numero di Nepero.

Dal fatto che $\forall \{b_n\} \to 0$

$$\boxed{(*) \quad \lim_{n \to +\infty} (1 + b_n)^{1/b_n} = e}$$

Ricavo che $\forall \{b_n\} \to 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1 + b_n)}{b_n} \overset{?}{=} \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{b_n} \ln(1 + b_n) = \lim_{n \to +\infty} \ln(1 + b_n)^{1/b_n}$$

pr. dei logaritmi

$(*)$

$$= \ln e = 1$$

Abbiamo provato:

$$\boxed{\forall \{b_n\} \to 0 \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1 + b_n)}{b_n} = 1}$$

Esempio $\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1 + 1/n)}{1/n} = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} n \log_{10}\left(1 + \frac{2}{n}\right) =$$

$$\lim_{n \to +\infty} 2 \cdot \frac{n}{2} (\log_{10} e) \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) =$$

$$\lim_{n \to +\infty} 2 \log_{10} e \cdot \underbrace{\frac{\ln(1 + 2/n)}{2/n}}_{\to 1} = 2 \log_{10} e$$

poiché

$$\boxed{\lim_{\substack{n\to+\infty\\ \{b_n\}\to 0}} \frac{\log_a(1+b_n)}{b_n} = \log_a e}$$

Esercizi

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln\Big(\underbrace{\frac{2n+3}{2n-1}}_{\to 1}\Big) = [\infty \cdot 0]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1+\frac{4}{2n-1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\ln\left(1+\frac{4}{2n-1}\right)}{\frac{4}{2n-1}}}}_{\to 1} \cdot \frac{4}{2n-1} = 2$$

questo continuo moltipl. e dividere è noioso!
Cerco ragionevoli approssimazioni.
Ho detto che $\lim_{\substack{n\to+\infty\\ \{b_n\}\to 0}} \frac{\ln(1+b_n)}{b_n} = 1$
Quindi se ho un limite di Prodotto o rapporto in cui uno dei fattori sia $\ln(1+b_n)$ posso sostituirlo con b_n ($\{b_n\}\to 0$). Infatti

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ \{b_n\}\to 0}} a_n \cdot \ln(1+b_n) =$$

$$= \lim_{\substack{n\to+\infty\\ \{b_n\}\to 0}} a_n \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}}}_{\to 1} \cdot b_n = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ \{b_n\}\to 0}} a_n b_n$$

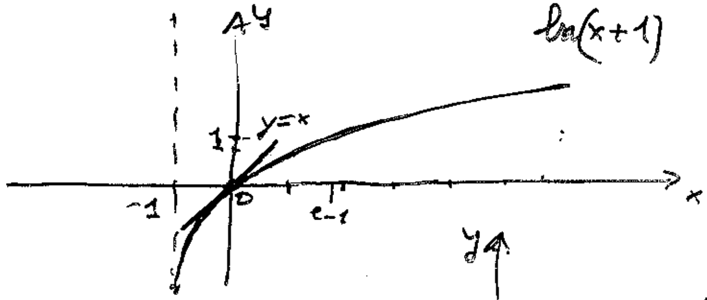
Questa procedura è del tutto generale e quindi conviene dare una definizione.
Considero due succ. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$.
Dico che $\{a_n\}$ è asintotica alla $\{b_n\}$ se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Scrivo $\boxed{a_n \sim b_n}$

Se $\{b_n\}$ è asintotica alla $\{a_n\}$ posso sostituire $\{b_n\}$ a $\{a_n\}$ in limiti in cui a_n compare come fattore di un prodotto o di un rapporto.

$\ln(1+b_n) \sim b_n$ se $\{b_n\}\to 0$;

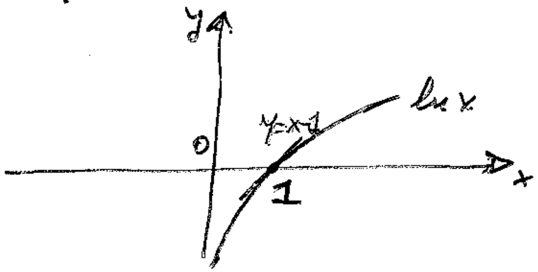
$\operatorname{sen} b_n \sim b_n$ se $\{b_n\}\to 0$, poiché $\lim_{\substack{n\to+\infty\\ \{b_n\}\to 0}} \frac{\operatorname{sen} b_n}{b_n} = 1$

Graficamente:
in prossimità di $x=0$ la funzione $\ln(1+x)$ e la funzione $\operatorname{sen} x$ si comportano (si possono confondere) con la funzione x.



e quindi

(si sono evidenziate le rette tangenti rispettivamente in (0,0) e (1,0) ai 2 grafici)



---

da: $\{b_n\} \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+b_n)}{b_n} = 1$

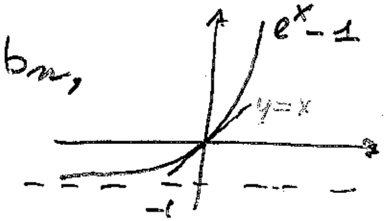
deduco

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \{b_n\}\to 0}} \frac{e^{b_n}-1}{b_n} = \left[\frac{e^0-1}{0}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

posto $a_n = e^{b_n} - 1 \Rightarrow e^{b_n} = a_n + 1 \Rightarrow b_n = \ln(1+a_n)$
NOTO CHE $\{a_n\} \to 0$

$$= \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \{a_n\}\to 0}} \frac{a_n}{\ln(1+a_n)} = 1$$

e quindi $e^{b_n} - 1 \sim b_n$,
se $\{b_n\} \to 0$.



Graficamente:
in prossimità di $x=0$
il grafico di $e^x - 1$ si
confonde con quello di x