$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-3^{-n}}{\ln(1+3^n)+n^{2/3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \left(\frac{+\infty+0}{+\infty+\infty}\right)$$

limiti che calcolo sugli addendi

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln\left(3^n\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\right)+n^{2/3}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln 3^n + \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}_{\downarrow\, 0} + n^{2/3}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\ln 3 + n^{2/3}} =$$

poiché $\left\{\frac{n^{2/3}}{n}\right\} \to 0$ cioè $n^{2/3}$ è un infinito di ord. inf. a n lo posso trascurare

ESERCIZI A RICHIESTA

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\ln 3} = \frac{1}{\ln 3} = \log_3 e.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n + \log_{1/2}(n)+1}{\ln(n^{1/2})+(\ln n)^{1/2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n + (\log_{1/2} e)(\ln n)+1}{\frac{1}{2}\ln n + (\ln n)^{1/2}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\log_{1/2} e)\ln n + 1}{\frac{1}{2}\ln n\left(1+\underbrace{\frac{2}{(\ln n)^{1/2}}}_{\downarrow\, 0}\right)} =$$

trascurabile poiché rispetto a l'altro addendo $\to +\infty$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\log_{1/2} e)\cancel{\ln n}}{\frac{1}{2}\cancel{\ln n}} =$$

$$= 2(1+\log_{1/2} e)$$

LIMITI DI FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Siano: (a,b) un qualunque intervallo (anche illimitato: $a=-\infty$ e/o $b=+\infty$);

- $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ funz. reale di variab. reale;
- $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$;
- $c\in(a,b)$ oppure $c=+\infty$ oppure $c=-\infty$;

ma in c la funzione potrebbe anche non essere def.

Allora si dice che al tendere di x a c la funzione $f(x)$ tende al limite ℓ

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell$$

se per ogni successione $\{x_n\}$ che tende a c la successione $\{f(x_n)\}$ tende a ℓ

Es. So che per ogni $\{x_n\}\to 0$ si ha $\left\{\frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n}\right\}\to 1$

Quindi $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

ATTENZIONE. Non basta 1 successione:

se $x_n = \pi n$ $\quad \{\operatorname{sen} x_n\} = \{0\} \to 0$

ma $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste!

Infatti se si prende la succ. di term. generale

$$x_n = \frac{\pi}{2}+2\pi n$$

$$\{\operatorname{sen} x_n\} \to 1 \neq 0.$$

Definizione analoga nel caso della divergenza (sostituire ℓ con $+\infty$ o $-\infty$)

• $\forall \{x_n\} \to 0 \quad \left\{ \dfrac{\ln(1+x_n)}{x_n} \right\} \to 1$

Quindi $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\boxed{\text{USO DELLA DEF DI LIMITE}}$

• $\forall \{x_n\} \to 0 \quad \left\{ \dfrac{e^{x_n}-1}{x_n} \right\} \to 1$

Quindi $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$

• $\forall \{x_n\} \to 0 \quad \displaystyle \lim_{n \to +\infty} \frac{(1+x_n)^t - 1}{x_n} = t$

$\forall t \in \mathbb{R}$

Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^t - 1}{x} = t$$

• $\forall \{x_n\} \to \pm\infty \quad \left\{ \left(1 + \dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} \right\} \to e$

$\displaystyle \Rightarrow \lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

. . . . . .

• $\forall \{x_n\} \to 0 \quad \{ (1+x_n)^{1/x_n} \} \to e \Rightarrow \displaystyle \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$

Possibili precisazioni della definizione di limite.

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad$ (a,b) limitato.
(non mi interessa se $LD(f)$ è più ampio di (a,b): mi interessa focalizzarmi su qs. intervallo)

$c \in (a,b)$

Dico che la $f(x)$ tende al limite finito l dal di sopra (per eccesso) se

$\forall \{x_n\} \to c$ si ha che $\{f(x_n)\} \to l^+$

cioè $f(x_n) \geq l$ $\forall x_n$ oltre a rispettare la def. di limite.

Vale anche se (a,b) ha 1 (o due) estremi infiniti.

dal di sotto (per difetto)

$\forall \{x_n\} \to c$ si ha $\{f(x_n)\} \to l^-$

cioè $f(x_n) \leq l$ $\forall x_n$ oltre a rispettare la def di limite.

$\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{1+x}{x} = 1^+$: sì perché
$\dfrac{1+x}{x} = 1 + \dfrac{1}{x} \geq 1 \quad \forall x > 0$

e si è visto inoltre che $\displaystyle \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \{x_n\} \to +\infty}} \frac{1+x_n}{x_n} = 1$

Definizioni di limite unilaterale.

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l$$: chiedo che $c \in \mathbb{R}$ in particolare che se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$, $c \neq a$, $c \neq b$

si legge per x che tende a c dalla destra

$\Updownarrow$ DF

per ogni succ. $\{x_n\} \to c^+$ si ha che $\{f(x_n)\} \to l$

cioè stiamo considerando NON tutte le successioni che convergono a c ma solo quelle i cui termini sono tutti $\geq c$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$\{x_n\} \to 0^+$ $\quad \left\{\frac{1}{x_n}\right\} \longrightarrow +\infty$

$\{x_n\} \to 0^-$ $\quad \left\{\frac{1}{x_n}\right\} \longrightarrow -\infty$

Posso dire $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

ma non esiste $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

Però se

esiste $\lim_{x \to c^+} f(x)$

" $\lim_{x \to c^-} f(x)$

e sono uguali, allora esiste il $\lim_{x \to c} f(x)$ (e coincide con i precedenti)

Esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

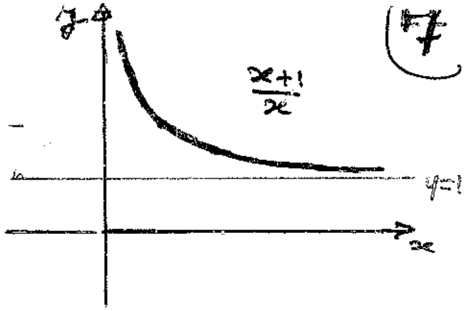
$\{x_n\} \to 0^+$ $\quad \left\{\frac{1}{x_n^2}\right\} \to \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\{x_n\} \to 0^-$ $\quad \left\{\frac{1}{x_n^2}\right\} \to \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow$ esiste $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Esempi.

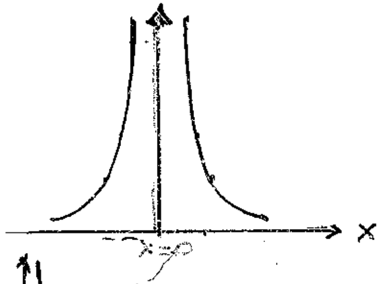
1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$



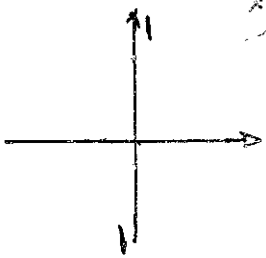
anzi $\frac{x+1}{x}$ tende a 1 dal di sopra

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1^+$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$



3. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = ?$



Limite per x che tende a c (FINITO) da DESTRA (o da SINISTRA) .... VEDI pag5

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

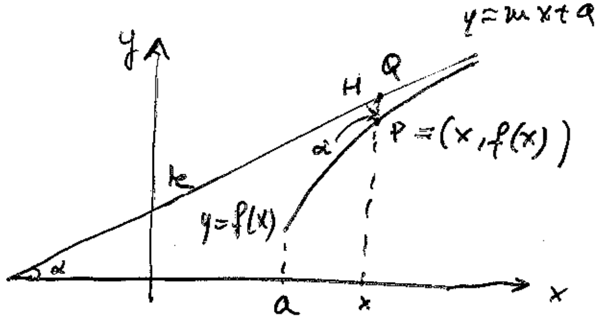
Limite per eccesso (o per difetto) .... VEDI pag4

Asintoti: se la funzione tende a comportarsi come una retta:

per $x \to c$ finito: se $\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty$ (o ... segni assortiti)
ASINTOTO VERTICALE

per $x \to c$ infinito: se $\lim_{x \to c} f(x) = l \neq \infty$: ORIZZONTALE

se $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$: ? OBLIQUO



$Q = (x, mx+q)$

Allora chi voglio far tendere a zero?
la distanza di P da r o $\overline{PQ}$?

$\widehat{HPQ} = \alpha$ e $H\widehat{Q}P = \frac{\pi}{2} - \alpha$

quando faccio tendere $\{x_n\}$ a $+\infty$ e quindi considero tanti triangoli rett. $P_n Q_n H_n$
tutti hanno uguali angoli acuti
$\Rightarrow$ sono simili

$$\overline{P_n H_n} = \overline{P_n Q_n} \cos\alpha$$

Quindi se $\{\overline{P_n H_n}\} \to 0$ anche
$\{\overline{P_n Q_n}\} \to 0$ e viceversa

Quindi chiedo che

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx+q)] = 0$$

ASINTOTO OBLIQUO

Può succedere che ci sia solo se si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{o: } = -\infty)$$

[oppure $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{o: } = -\infty)$$]

È una retta non parallela a nessuno dei 2 assi

$\Rightarrow$ equazione $y = mx+q$ con $m \neq 0$

e tale che la distanza tra il punto $P \equiv (x, f(x))$ del grafico di f

e il punto $Q \equiv (x, mx+q)$ della retta

tenda a 0 quando $x \to +\infty$ [oppure a $-\infty$]

Come lo cerco?

(1) Controllo che sia in esame un limite per $x\to+\infty$ (o $x\to-\infty$)

Se no: NON DEVO CERCARE l'asintoto obliquo. Altrimenti

(2) Controllo che $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (o $\lim_{x\to-\infty} f(x)$) sia $+\infty$ oppure $-\infty$

se no: NON DEVO CERCARE l'asintoto obliquo. Altrimenti:

(3)(*) Esiste ed è finito e $\neq 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ (o $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$) ?

se non esiste o non è finito o è $=0$: L'ASINTOTO NON C'È.

Altrimenti chiamo **m** questo limite e passo a:

(4) Esiste ed è finito $\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx$?

se non esiste o non è finito: L'ASINTOTO NON C'È

Altrimenti chiamo **q** questo limite.

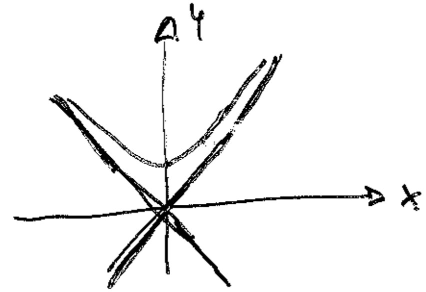
Ho così trovato l'asintoto:

$$y = mx+q.$$

(*) La risposta SÌ a questo punto significa che $f(x)$ ha lo stesso ordine di ∞ di una retta (... cioè ordine 1).

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} \qquad y = \sqrt{x^2+1}$$

$$\begin{cases} y^2 = x^2+1 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad y^2 - x^2 = 1$$



so che gli asintoti ci sono!

Li determino con la procedura illustrata a fianco

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$$

$\forall \{x_n\} \to +\infty$ $\{x_n^2\} \to +\infty$
$\{x_n^2+1\} \to +\infty$
$\{(x_n^2+1)^{1/2}\} \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

$x > 0$ poiché $x \to +\infty$

$m = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - 1\cdot x = [+\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+1) - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

passando attraverso le radici

$q = 0$ $\Rightarrow$ asintoto per $x \to +\infty$

$$y = 1\cdot x + 0$$

e per $x \to -\infty$?

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \underset{\substack{\downarrow \\ x<0 \\ x=-|x|}}{=} \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = -1$$

$m = -1$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} + x = [\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2+1) - x^2}{\sqrt{x^2+1} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{+\infty} \underbrace{-x}_{+\infty}} = 0^+$$

$q = 0$

asintoto per $x \to -\infty$: $y = -x$

Patologie

1) $f(x) = \ln x$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

ma $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{\substack{\forall \{x_n\} \to +\infty \\ n \to +\infty}} \frac{\ln x_n}{x_n} = 0$

l'ordine di ∞ non è lo stesso: non c'è asintoto obliquo.

2) $f(x) = x + \ln x$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} (x + \ln x) = +\infty$

l'ordine di ∞ è lo stesso di x. Ma $\qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1$;

$\lim_{x \to +\infty} (x + \ln x) - x = +\infty$: NON C'È ASINT. OBLIQUO

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell \qquad \lim_{x \to c} g(x) = \ell'$$

significa:

$\boxed{\forall \{x_n\} \to c}$

$\{f(x_n)\} \to \ell$ e $\{g(x_n)\} \to \ell'$

e per le proprietà di calcolo del limite delle successioni

$$\{f(x_n) + g(x_n)\} \to \ell + \ell'$$

tranne nel caso in cui ℓ ed ℓ' siano ∞ di segno opposto

questo vale $\forall \{x_n\} \to c$ e quindi per def di limite

$$\lim_{x \to c} f(x) + g(x) = \ell + \ell'$$

tranne nel caso $[\infty - \infty]$

(F.1.)

(*)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + x + 3} = -\frac{1}{3}$$; $x^3, x^2 \ldots$ sono infinitesimi e quindi pesano meno di 1 e 3.

* Conti analoghi provano le altre formule su limiti di differenza, prodotto e rapporto