3. TRASFORMAZIONI SUI LIMITI

(Sottocaso del discorso sul limite di funzioni composte)

È talora utile applicare le seguenti sostituzioni

$\boxed{t=-x}$ oppure $\boxed{t=1/x}$ oppure $\boxed{t=x-a}$

La prima trasforma limiti per $x\to-\infty$ in limiti per $t\to+\infty$; la seconda trasforma limiti per $x\to0+$ in limiti per $t\to+\infty$ e viceversa; la terza trasforma i limiti per $x\to a$ in limiti per $t\to0$

ESEMPI

- $\lim\limits_{x\to0+} x\ln x = [0\cdot\infty] \overset{t=1/x}{=} \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{\ln t}{t} =$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{t=-x}{=} \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{-t} =$

- $\lim\limits_{x\to\pi/3}\frac{3x-\pi}{\operatorname{sen}(x-\pi/3)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{t=x-\pi/3}{=} \lim\limits_{t\to0}\frac{3t}{\operatorname{sen} t} =$

- $\lim\limits_{x\to0+} x\left(e^{1/x}-1\right) = [0\cdot\infty] \overset{t=1/x}{=} \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\left(e^{t}-1\right) =$

  $= \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^{t}}{t}\left(1-e^{-t}\right) =$

- $\lim\limits_{x\to0-} x\left(e^{1/x}-1\right) \overset{t=-1/x}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{1}{t}\left(e^{-t}-1\right) = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1-e^{-t}}{t} =$ Qui non c'è indecisione, ma si vede meglio così

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x}+x = [\infty-\infty]$ Si può risolvere direttamente. Oppure: $t=-x$

  $= \lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{t^2+2t}-t = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^2+2t-t^2}{\sqrt{t^2+2t}+t} = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{2t}{|t|+t} =$

  $\underset{t>0}{=} \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{2t}{t+t} =$
  poiché $t\to+\infty$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{3x-\pi}{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left[\begin{array}{l} x=t+\frac{\pi}{3} \\ t=x-\frac{\pi}{3}\end{array}\right]$$

$3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$$= \lim_{t\to0}\frac{3t}{\operatorname{sen} t} = 3$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(1-x)\operatorname{sen}(1-x)}{(\ln x)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{array}{l} x=t+1 \\ t=x-1\end{array}\right|$$

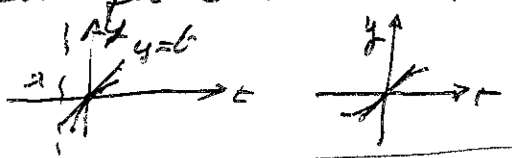
$$= \lim_{t\to0}\frac{-t\operatorname{sen}(-t)}{[\ln(1+t)]^2} =$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{t\cdot\operatorname{sen} t}{(\ln(1+t))^2} =$$

Ricordo i limiti notevoli:

$$\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \qquad \lim_{t\to0}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

cioè per $t\to0$ $\ln(1+t)\sim t$ e $\operatorname{sen} t\sim t$



$$= \lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot\frac{t}{\ln(1+t)} = 1$$

più semplice sarebbe usare gli asintotici

$$\lim_{t\to0}\frac{t\cdot\operatorname{sen}t}{(\ln(1+t))^2}=\lim_{t\to0}\frac{t\cdot t}{t^2}=1$$

$$\lim_{x\to0^+}x\left(e^{1/x}-1\right)=\Big[0\cdot(\underbrace{e^{+\infty}-1}_{+\infty})\Big]\text{: F.I. }[0\cdot\infty]$$

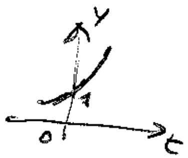
$$\underset{\boxed{x=\frac{1}{t}}}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\left(e^t-1\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}-\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}=$$

$= +\infty-0=+\infty$ non ha sicuramente asintoti obliqui poiché $\to+\infty$ "quasi" come un'esponenziale

$f(x)=x\left(e^{1/x}-1\right)$ ha I.D. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{1/x}-1\right)=\left(+\infty\cdot(e^0-1)\right)=[\infty\cdot0]=$$

$$\underset{x=\frac{1}{t}}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left(e^t-1\right)=1^+$$



e se considero

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=?$$

$$=0\cdot(0-1)=0$$

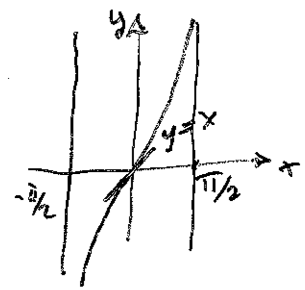
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\;?$$

$$=\lim_{t\to0^-}\frac{e^t-1}{t}=1^+ \quad \text{poiché } e^t-1<0,\ t<0$$

ALTRI LIMITI NOTEVOLI

(1) $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}_{\downarrow\,1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\downarrow\,\frac{1}{1}}=1$$

$\operatorname{tg}x\sim x$ per $x\to0$



(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=1$$ (pensare al grafico della funz. inversa)

$$\boxed{\begin{array}{l}\arctan x=t\\ x=\operatorname{tg}t\end{array}}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\operatorname{tg}t}=1$$

$\Longrightarrow$ $\arctan x\sim x$ per $x\to0$.

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\operatorname{sen}^2x}{x^2}}_{\to1}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow$ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}\cdot x^2}=1$ $\Longrightarrow$ per $x\to0$ $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

5

e quindi per $x \to 0$

$$\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$$

e si vedrà che per $x \to 0$

$$\boxed{\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2}$$

Ho trovato i polinomi di Taylor relativi al punto iniziale $x_0 = 0$ e arrestati al 1° o 2° ordine delle seguenti funzioni:

$\boxed{\text{per } x \to 0}$

$e^x \sim 1+x$ ... p.T. 1° ord. di e^x : $1+x$

$\ln(1+x) \sim x$ .... $\ln(1+x)$: x

$\operatorname{sen} x \sim x$ ... $\operatorname{sen} x$: x

$\operatorname{tg} x \sim x$ ... $\operatorname{tg} x$: x

$\operatorname{arctan} x \sim x$ .... $\operatorname{arctan} x$: x

$\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$ ... 2° ordine di $\cos x$: $1 - \frac{1}{2}x^2$

sono approssimazioni polinomiali di queste funzioni in un intorno di $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x + x^2 \ln x}{\ln(1+x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x = \boxed{x = \frac{1}{t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^2} \cdot \ln\frac{1}{t} = \lim_{t \to +\infty} -\frac{\ln t}{t^2} = 0^-$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2x + x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 2 + x \ln x = 2$$

6

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + 2\ln(1-x)}{x^2 - 2e^x} = \frac{1+0}{0 - 2\cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) + x}{2(e^x + x)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos(x-1) - 1}{(\ln x)^4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \boxed{\begin{array}{l} t = x-1 \\ x = t+1 \end{array}}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cos t - 1}{[\ln(1+t)]^4} = \lim_{t \to 0} \frac{(\cos t - 1)(\cos t + 1)}{(t^4)(\cos t + 1)} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-(\operatorname{sen} t)^2}{t^4(\cos t + 1)} = \lim_{t \to 0} \frac{-t^2}{t^4(\cos t + 1)} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-1}{t^2(\cos t + 1)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1/2} \frac{e^{2x-1} - 1}{2x^2 - x} = \left[\frac{e^{2/2 - 1} - 1}{2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}\right] \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{e^{2x-1} - 1}{x(2x-1)} = 2$$

$\frac{1}{2}$

sostituire $2x - 1 = t$, $x = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{(\frac{t}{2} + \frac{1}{2})t}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{tg\, 2(3-x)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{-tg\, 2(x-3)}{x-3} =$$

$$\boxed{tg\, 2(x-3) \sim 2(x-3) \text{ se } x \to 3}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-(2(x-3))}{x-3} = -2$$

$$\lim_{x\to -\infty} x \ln(1+e^x) = [\infty \cdot 0] \quad \begin{cases} e^x \to 0 \text{ per } x\to-\infty \\ \ln(1+e^x) \to 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{x} \underset{\boxed{x=-t}}{=} \lim_{t\to+\infty} -t \cdot e^{-t} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln(1+e^x) \sim e^x \\ \text{per } x\to-\infty \end{array}}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} -\frac{t}{e^t} = 0^-$$

OPPURE

$e^x = t$ con $t \to 0$

$$x \ln(1+e^x) = (\ln t)\cdot \ln(1+t) \sim t \ln t \to 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{1/x}-1\right) \text{ Già fatto}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4-x)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(x^4-x)}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x^4}{2x} - \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4-x)}{2x} =$$

x^4 è infinitesimo di ord. superiore a $-x$ e quindi lo trascuro

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5x-\cos x}$$

Esiste? Se sì qual è?

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5x\left(1-\frac{\cos x}{5x}\right)} =$$

$\frac{\cos x}{5x} \to 0$ per $x\to+\infty$ perché $|\cos x| \le 1$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} x(7+3\cos x) \overset{?}{=} \text{ esiste?}$$

Osservo che $4 \le 7+3\cos x \le 10$

$$\Rightarrow \quad 4x \le x(7+3\cos x) \le 10x$$

$4x \to +\infty$, $10x \to +\infty$

$\Rightarrow$ teor del confronto $\lim_{x\to+\infty} x(7+3\cos x) = +\infty$

Ma l'infinito di questa funzione non è confrontabile con x