ESERCIZI (1

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{4/3}+2x^2+5x}{x^5-x^3-2x\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

sono infinitesimi ordine superiore al numeratore $x^{4/3}$ e $2x^2$ (rispetto a $5x$) ; ad denom. x^5 e x^3 (" $-2x\sqrt{x}$)

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{5\cancel{x}}{-2\cancel{x}\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-7x^2+2x+3}{4x^2-7x-15} = \left[\frac{54-63+6+3}{36-21-15}\right]$$

cioè $\left[\frac{0}{0}\right]$

scomporre numeratore e denominatore come prodotto di $(x-3)$ per opportuno polinomio

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -7 & 2 & 3 \\ 3 & & 6 & -3 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|c} & 4 & -7 & -15 \\ 3 & & 12 & 15 \\ \hline & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

Num $= (x-3)(2x^2-x-1)$ Den $= (x-3)(4x+5)$

quindi il limite è

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(2x^2-x-1)}{(x-3)(4x+5)} = \lim_{x\to 3} \frac{2x^2-x-1}{4x+5} = \frac{14}{17}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$$

Come trovare una funzione (più semplice) asintotica a una data per $x\to c^+$, c^- (2

è definita in $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

a chi è asintotica la funz. $f(x)$ in un intorno destro di 0?

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1+0)}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

È vero che $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$?

$$\underset{x>0}{=} \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1 \quad \text{SI!}$$

e a chi è asintotica la $f(x)$ in un intorno sinistro di -1?

Quando ho trovato l.D. ho discusso $x(x+1)>0$: in $(-\infty,-1)$ la disuguaglianza vale perché entrambi i fattori sono <0. devo sostituire ad essi i corrispondenti valori assoluti:

$$x(x+1) = (-x)(-x-1)$$

Sostituisco $x=-1$ solo nel fattore che non si annulla: $(1)\cdot(-x-1)$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x-1}} \qquad (-x-1>0 \iff x<-1 \text{ o.k.})$$

questa è la funz asintotica in un intorno sin. di -1

Proprietà delle funzioni continue

f, g continue in c $\Rightarrow$
$f \pm g$ continua in c
$f \cdot g$ " " "
f/g " " " se $g(c) \neq 0$

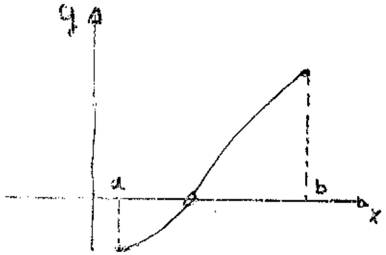
$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua in } c \\ g \quad " \quad " \ f(c) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ continua in c.

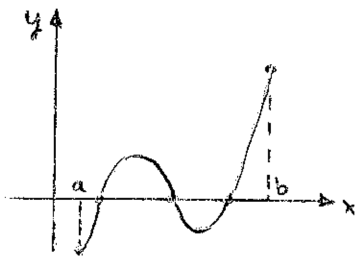
Esempi di funzioni continue (a parte quelle elementari):

- polinomi
- razionali fratte ....
- $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$

Funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$

TEOREMA degli ZERI. Sia f continua in $[a,b]$ e $f(a)f(b)<0$. Allora esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f(c)=0$





Dim. Consiste nella costruzione di una successione $\{c_n\}$ di punti di (a,b) CONVERGENTE a UNO ZERO di f.

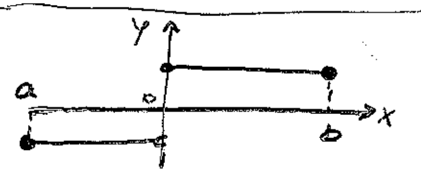
1°) $c_1 = \frac{a+b}{2}$. Se $f(c_1)=0$ STOP;
altrimenti se $f(a)f(c_1)<0$ pongo $a_1=a$, $b_1=c_1$
se $f(b)f(c_1)<0$ " $a_1=c_1$, $b_1=b$

Se $g(c)=0$ e voglio avere qualche speranza che la funzione (definita almeno in parte da) $\frac{f(x)}{g(x)}$ sia continua in $x=c$, tale funzione in $x=c$ non può essere definita da $\frac{f(x)}{g(x)}$, perché la funzione

per essere continua in $x=c$ deve essere almeno definita in c e ovviamente $\frac{f(c)}{0}$ non è definito! È la situazione che si presenta nell'esempio di funz. cont. in $x=0$

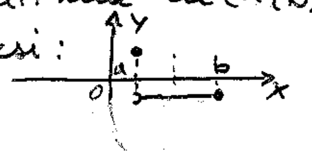
$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$f: (a,b) \to (a',b') \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad c \in (a,b)$
$g: (a',b') \to \mathbb{R}$



non è continua
$\Rightarrow$ non vale il teor degli zeri

Se la $f(x)$ è definita e continua in (a,b) ma non in $[a,b]$ può verificarsi:



Ancora una volta non vale il teor degli zeri

Riparto dall'intervallo $[a_1, b_1]$, per il quale valgono le ipotesi viste per $[a, b]$. Quindi

2°) $c_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Se $f(c_2)=0$ STOP;

altrimenti ITERO : $a_2 = \dots$ $b_2 = \dots$

Continuando così si ha una coppia di successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ t.c.

I) $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$: successioni MONOTONE

la prima non decrescente superiormente limitata

la seconda non crescente inferiormente limitata

II) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

III) $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$. IV) f è una funz. continua in ogni punto di (a,b)

Da I) si deduce $\{a_n\} \to l_1$, $\{b_n\} \to l_2$ per $n \to \infty$

Da II) si deduce che $b_n - a_n \to 0 \Rightarrow l_1 = l_2 = l$

Da IV) " $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(l) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$

Da III) e dal teor. della permanenza del segno si deduce

$$f(a_n) \cdot f(b_n) \longrightarrow (f(l))^2 \le 0$$

.... cioè $f(l) = 0$, cioè l è lo zero cercato

esplicitato a pag 7

Questo è un metodo di calcolo (approssimato) degli zeri: necessita però di una LOCALIZZAZIONE precisa degli zeri. Ed è un metodo lungo.

TEOR. DEGLI ESTREMI (Weierstrass). f continua su $[a,b] \Rightarrow$

i) f limitata su $[a,b]$

ii) f dotata di massimo e di minimo ASSOLUTI in $[a,b]$.

cioè ...

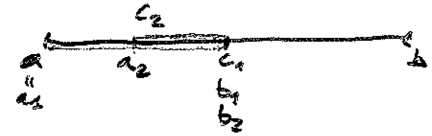
in $[a_1, b_1]$

2°) $c_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ se $f(c_2) = 0$ stop.

se $f(c_2) f(a_1) < 0$ pongo $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_2$

se $f(c_2) f(b_1) < 0$ pongo $a_2 = c_2$ e $b_2 = b_1$

ES.



Perché $\{a_n\}$ è sup. limitata? poiché $\forall n$

$a_n \le b$

analogamente $\{b_n\}$ è inf. limitata poiché $\forall n$: $b_n \ge a$

$\Rightarrow$ quindi queste succ. convergono

$\{a_n\} \to l_1$ $\{b_n\} \to l_2$

ma $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$a_n < b_m$

$\Rightarrow l_1 = \operatorname{Sup} a_n \le \operatorname{Inf} b_m = l_2$

Voglio mostrare che $l_1 = l_2$.

$\{b_n - a_n\} = \{\frac{b-a}{2^n}\} \to 0$, $b_n - a_n \to l_2 - l_1$ $\Rightarrow l_1 - l_2 = 0 \Rightarrow l_1 = l_2 = l$

PROSEGUE

Quindi le due succ. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergono allo stesso limite ℓ

$f(a_n)\cdot f(b_n) < 0 \quad \forall n$

Teor. della perm. del segno

$\{f(a_n)\cdot f(b_n)\}$ se ha limite ha limite ≤ 0

?

Entra in gioco la continuità:

$f(x)$ è continua in ogni punto di $[a,b]$

in particolare è continua in $\ell \in (a,b)$

cioè:

$$\lim_{x\to \ell} f(x) = f(\ell)$$

che per def di limite significa: $\forall \{x_n\}$ t.c. $\{x_n\} \to \ell$ si ha $\{f(x_n)\} \to f(\ell)$

So che $\{a_n\} \to \ell$ e $\{b_n\} \to \ell$

$\Rightarrow \{f(a_n)\} \to f(\ell)$ e $\{f(b_n)\} \to f(\ell)$

Quindi $\{f(a_n)\cdot f(b_n)\} \to f(\ell)\cdot f(\ell) = [f(\ell)]^2$

Deve essere $[f(\ell)]^2 \leq 0 \quad \Rightarrow (f(\ell))^2 = 0$

$\Rightarrow \quad f(\ell) = 0 \qquad$ C. V. D.

ESEMPIO

$f(x) = x^3 - x + 1$

ha zeri e se sì dove ?

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad$ (∞ di ord. sup. è x^3)

posso trovare un intervallo $[b, +\infty)$ in cui

$f(x) > M > 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(b) = M > 0$

posso trovare un intervallo $(-\infty, a]$ in cui

$f(x) < -\bar{M} < 0 \quad (\bar{M} > 0) \quad \Rightarrow f(a) = -\bar{M} < 0$

$\Rightarrow$ in $[a,b]$ il polinomio è continuo

$\Rightarrow$ Teor. degli zeri: visto che $f(a)f(b) < 0$ esiste almeno uno zero in $[a,b]$.

$f(0) = 1 > 0$

$f(-2) = -8+2+1 < 0$

$\Rightarrow$ esiste uno zero in $[-2, 0]$

$[-2, 0]$: $\quad c_1 = -1 \qquad f(-1) = (-1)^3 - (-1) + 1 = 1 > 0$

$b_2 = c_1 = -1 \qquad a_2 = -2$

$[-2, -1]$: $\quad c_2 = -\frac{3}{2} \qquad f(-\frac{3}{2}) = (-\frac{3}{2})^3 - (-\frac{3}{2}) + 1 =$

$= -\frac{27}{8} + \frac{5}{4} < 0$

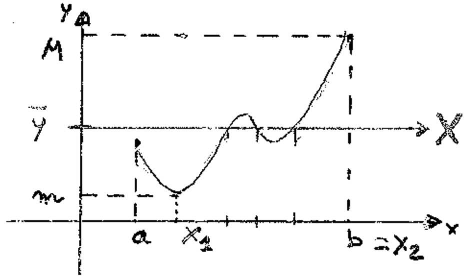
$a_3 = -3/2 \qquad b_3 = -1$

$[-3/2, -1]$ $\quad c_3 = -5/4 \qquad f(-5/4) = \frac{-125}{64} + \frac{9}{4} > 0$

$[-3/2, -5/4]$ ecc.

TEOR. dei VALORI INTERMEDI. f continua in $[a,b]$

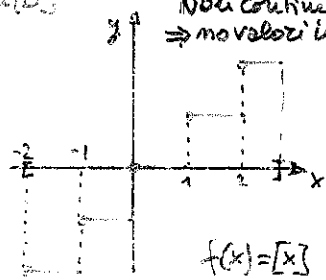
Per ogni valore $\bar{y}$ compreso tra il minimo m e il max M esiste un $\bar{x} \in [a,b]$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{y}$.



Infatti: se $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$, la funzione $g(x) = f(x) - \bar{y}$ è continua in $[x_1, x_2] \subseteq [a,b]$ e $g(x_1) = m - \bar{y} < 0$ mentre $g(x_2) = M - \bar{y} > 0$. Per il teorema degli zeri esiste $c \in [x_1, x_2]$ t.c. $g(c) = f(c) - \bar{y} = 0$

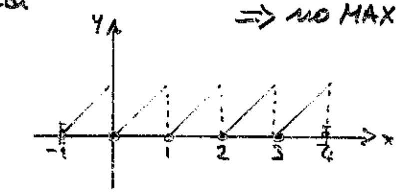
ATTENZIONE. Questi risultati non valgono in generale per funzioni non continue in almeno un punto di $[a,b]$

Non continua $\Rightarrow$ no valori intermedi



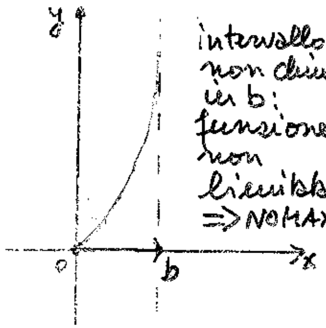
$f(x) = [x]$

Non continua $\Rightarrow$ no MAX assoluti



$f(x) = x - [x]$

$\Rightarrow$ Se prendo $[x] - x$ ho esempio di assenza di minimi assoluti



intervallo non chiuso in b: funzione non limitata $\Rightarrow$ NO MAX

Ma anche se cade qualche altra ipotesi:

es. $f(x) = x^2$ def. su $\mathbb{R}$ ....

funzione continua non limitata poiché l'intervallo di def. non è limitato