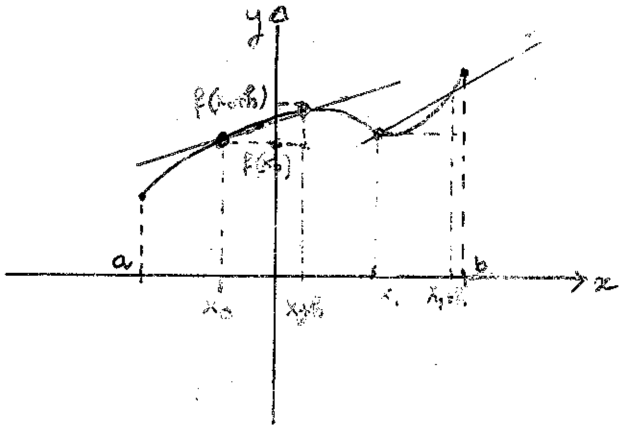
DERIVATA di una funz. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$

Problema della VARIAZIONE della variabile dipendente in relazione alla variazione della variabile indipendente



$y = f(x)$

TASSO DI VARIAZIONE MEDIA di $f(x)$ rispetto a x:

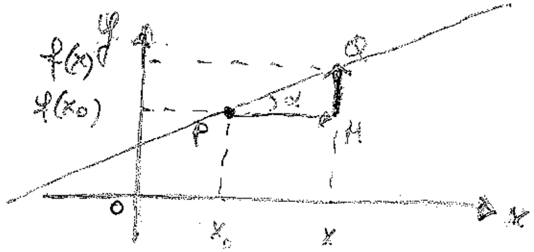
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Viene anche detto RAPPORTO INCREMENTALE

GEOMETRICAMENTE è il coefficiente angolare della retta congiungente $P = (x_0, f(x_0))$ con $(x_0+h, f(x_0+h)) = Q$

Quando h diventa molto piccolo, $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ <u>PUÒ</u> RAPPRESENTARE molto bene la pendenza del grafico di $f(x)$ in prossimità di $(x_0, f(x_0))$. PRECISANDO:

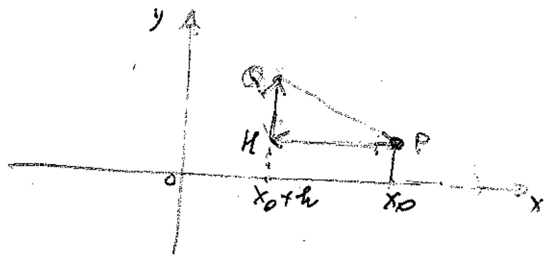
se <u>esiste</u> <u>ed è finito</u> $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ si dice che f è <u>derivabile</u> in x_0 e il limite viene detto <u>derivata di f</u> <u>in</u> x_0 e denotato con $f'(x_0)$.



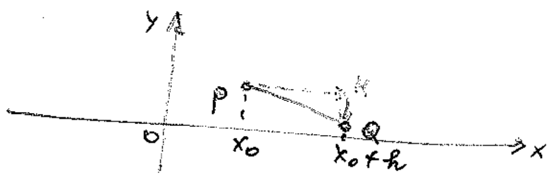
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\overrightarrow{HQ}}{\overrightarrow{PH}} = \tan \alpha$$

Oppure rispetto alla retta per P e Q è il coefficiente angolare

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ Si chiama rapporto incrementale

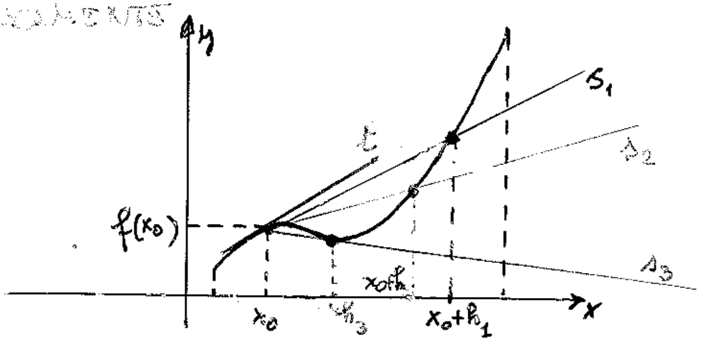


$h < 0$



ecc.

GEOMETRICAMENTE



la derivata rappresenta il coefficiente angolare della retta t "TANGENTE" in $(x_0, f(x_0))$ al grafico di $f(x)$

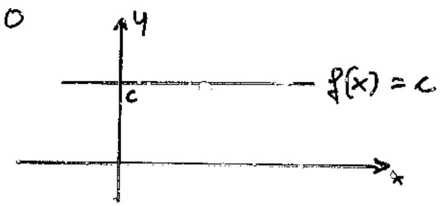
limite delle secanti passanti per $(x_0, f(x_0))$ e per un altro punto del grafico: sua equazione?

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ESEMPI.

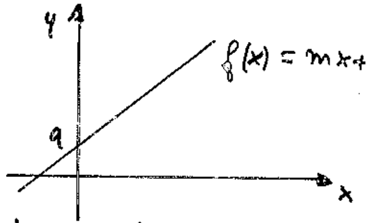
1. $f(x) = c$ ove $c \in \mathbb{R}$ è derivabile in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f'(x_0) = 0$

$\left.\begin{array}{l} f(x_0+h) = c \\ f(x_0) = c \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} = 0$



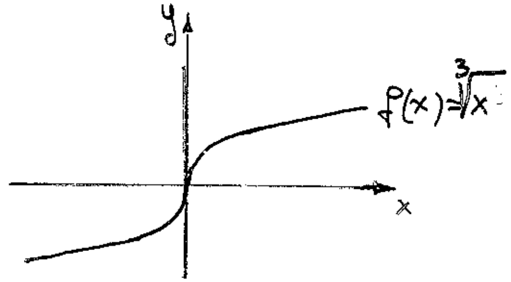
2. $f(x) = mx + q$ $(m, q \in \mathbb{R})$ è derivabile in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f'(x_0) = m$

$\left.\begin{array}{l} f(x_0+h) = m(x_0+h)+q \\ f(x_0) = m x_0 + q \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{mh}{h} = m$



3. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ è derivabile in ogni $x_0 \neq 0$, MA NON in $x_0 = 0$ poiché:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty$$

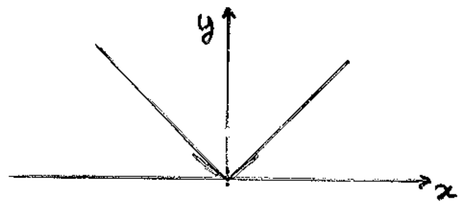


ATTENZIONE: in (0,0) esiste comunque la tangente al grafico: $x = 0$

4. $f(x) = |x|$ è derivabile in ogni $x_0 \neq 0$, MA NON in $x_0 = 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } h > 0 \\ -1 & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

non esiste poiché è $\neq$ da DS e da SIN



Derivata destra di $f(x)$ in x_0: esiste se esiste finito

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \; : \; f'_+(x_0)$$

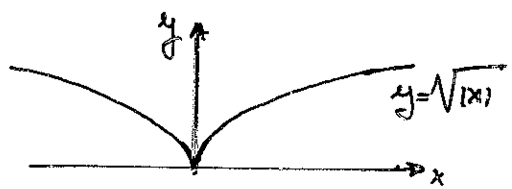
Idem: derivata sinistra

Quindi $|x|$ ha in $x_0 = 0$ derivata destra e " sinistra } DIVERSE

Parlo di punti angolosi. Tra la "tangente da sinistra" e quella "da destra" si forma un angolo $\alpha \in (0, \pi)$

Invece cuspidi se $\lim_{h \to 0^\pm} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty$ (oppure $\mp\infty$). ESEMPIO

$f(x) = \sqrt{|x|}$



$$\lim_{h \to 0^\pm} \frac{\sqrt{|h|} - \sqrt{0}}{h} = \pm\infty$$

tra le 2 tangenti l'angolo misura 0.

REGOLE di CALCOLO

Ingredienti : 1. DERIVATE di FUNZIONI ELEMENTARI
2. TEOREMI di DERIVAZIONE

1. DERIVATE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

Denotando con $Df(x)$ la derivata di $f(x)$ si ha:

- $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ (qualunque sia l'esponente α, in ogni x interno all'I.D. della funzione potenza in esame)
- $De^x = e^x$ $\boxed{\text{VEDI A LATO E PAG. SUCC.}}$
- $D\ln x = \frac{1}{x}$
- $D\,\mathrm{sen}\,x = \cos x$
- $D\cos x = -\mathrm{sen}\,x$.

Caso particolare : $D(\sqrt{x}) = D(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. TEOREMI di DERIVAZIONE

Siano f, g definite in (a,b) a valori in $\mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$
Se f e g sono derivabili in x_0 si ha

- $D(f \pm g)(x_0) = Df(x_0) \pm Dg(x_0)$
- $D(f \cdot g)(x_0) = Df(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot Dg(x_0)$ (*)

caso particolare : se $g(x) = c$ $c'(x) = 0$

$D(cf)(x_0) = c f'(x_0)$

e quindi : * $D(\log_a x) = D(\log_a e \cdot \ln x) = \log_a e \cdot \frac{1}{x}$

* derivata di un polinomio ....

(*) Se si pensa che possa valere la formula $D(fg) = Df \cdot Dg$, provare a derivare $x \cdot 1$

$$(e^x)'_{x=x_0} = e^{x_0}$$

Infatti

$f(x_0+h) = e^{x_0+h}$
$f(x_0) = e^{x_0}$ $\Rightarrow \dfrac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$$

$f(x) = \ln(x)$ $f'(x_0) = \dfrac{1}{x_0}$

Infatti:

$f(x_0+h) = \ln(x_0+h)$

$f(x_0) = \ln(x_0)$

$$\frac{\ln(x_0+h) - \ln(x_0)}{h} = \frac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{x_0}}{h} = \frac{1}{x_0}$$

$\frac{h}{x_0} \to 0$

$\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right) \sim \frac{h}{x_0}$

$f(x) = x^n$

$f(x_0+h) = (x_0+h)^n = x_0^n + n x_0^{n-1} h +$ somme di potenze di h di ordine superiore

$f(x_0) = x_0^n$

$f(x_0+h) - f(x_0) = n x_0^{n-1} \cdot h +$ potenze di h di ordine sup

Quindi:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{n x_0^{n-1}\cancel{h}}{\cancel{h}} + \underbrace{\frac{\binom{n}{2} h^2 x_0^{n-2} \dots}{h}}_{\downarrow\, 0}$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} n x_0^{n-1}$$

ES: $f(x) = x^3$

$f'(x_0) = 3x_0^2$

$\Longrightarrow$ la tangente in $(0,0)$ al grafico di x^3 è la retta di coeff. angolare $f'(0) = 3\cdot 0 = 0$ e passante per $(0,0)$

$\Longrightarrow \quad y = 0$

$$(x^\alpha)'_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^\alpha - x_0^\alpha}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^\alpha\left[\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)^\alpha - 1\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^\alpha}{x_0}\cdot\underbrace{\frac{\left(\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^\alpha - 1\right)}{\left(\frac{h}{x_0}\right)}}_{\to\alpha} = \alpha x_0^{\alpha-1}$$

In particolare

$\alpha = \frac{1}{2}$: $(\sqrt{x})'_{x=x_0} = \frac{1}{2} x_0^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x_0^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

$$(\sin x)'_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin x_0 \frac{\overbrace{\cos h - 1}^{\sim -h^2/2}}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x_0 \frac{\sin h}{h} =$$

$$= 0 + \cos x_0 \cdot 1 = \cos x_0$$

$$(\cos x)'_{x=x_0} = -\sin x_0$$

TEOREMA di CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI

Hp: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$, esiste la derivata di f in x_0

TS. allora f è continua in x_0.

$\Downarrow$

TEOR. di DERIVAZIONE

TEOREMA di DERIVAZIONE delle FUNZIONI COMPOSTE

Siano $f: (a,b) \to B \subseteq \mathbb{R}$ e $g: (c,d) \to \mathbb{R}$ con $B \subseteq (c,d)$

due funzioni tali che

a, b, c, d eventualmente infiniti

f sia derivabile in $x_0 \in (a,b)$

g " " in $f(x_0) \in B \subseteq (c,d)$

Allora $g \circ f(x) = g(f(x))$ è derivabile in x_0 e

$$(*) \quad \boxed{D(\underset{\text{composizione}}{g \circ f})(x_0) = g'(f(x_0)) \underset{\text{prodotto}}{\cdot} f'(x_0)}$$

Per ricordarselo provare a scrivere così:

$y = f(x)$ e rappresento $f'(x)$ come $\frac{dy}{dx}$

$z = g(y)$ " $g'(y)$ come $\frac{dz}{dy}$

mentre rappresento $D(g \circ f)$ come $\frac{dz}{dx}$

Allora $(*)$ si rilegge: $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

ESEMPI (a lato in maggior dettaglio)

- Considero $g(y) = \frac{1}{y}$. $\forall y \neq 0$: $g'(y) = \frac{-1}{y^2}$.
  Allora $D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = D(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$
  in tutti gli x tali che $f(x) \neq 0$.

- Conseguenza: FORMULA di DERIVAZIONE del RAPPORTO:
  Se $g(x_0) \neq 0$
  $$D\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Infatti:

•• In particolare: $D(\operatorname{tg} x) = D\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'_{x=x_0} = (x^{-1})'_{x=x_0} = (-1 \cdot x^{-2})_{x=x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

$g: (a,b) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

che sia derivabile in $x_0 \in (a,b)$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'_{x=x_0} = -\frac{1}{[g(x_0)]^2} \cdot g'(x_0)$$

funz. composta $x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{1/(\,)} \frac{1}{g(x)}$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'_{x=x_0} = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=x_0} = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)'_{x=x_0} =$$

$$= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2} =$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)'_{x=x_0} = \frac{\cos x_0 \cdot \cos x_0 - (-\operatorname{sen} x_0)(\operatorname{sen} x_0)}{(\cos x_0)^2} = \frac{1}{(\cos x_0)^2} = 1 + (\tan x_0)^2$$

Calcolare

$\left(\ln x - 5x^3 + 4\cos x\right)'_{x=x_0} =$

$(\ln x_0)' - 5(x_0^3)' + 4(\cos x_0)' =$

$= \frac{1}{x_0} - 5\cdot 3x_0^2 - 4\sin x_0$

$\left(\frac{1}{2}x^2 + e^x + 3 + x\right)'_{x=x_0} = x_0 + e^{x_0} + 1$

$\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\right)'_{x=x_0} =$

$= n a_n x_0^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x_0^{n-2} + \dots + a_1$

$(2^x)'_{x=x_0} = \left(e^{x\ln 2}\right)'_{x=x_0}$ funzione composta

$x \xrightarrow{(\cdot)\ln 2} x\ln 2 \xrightarrow{e^{(\cdot)}} 2^x$? Derivata ?

$y = f(x) = x\cdot\ln 2$ $\qquad f'(x_0) = 1\cdot\ln 2 = \ln 2$

$z = g(y) = e^y$ $\qquad g'(f(x_0)) = e^{f(x_0)} = x_0\cdot\ln 2$

$(g\circ f(x))'_{x=x_0} = (2^x)'_{x=x_0} = g'(f(x_0))\,f'(x_0) = \ln 2\cdot e^{x_0\ln 2} =$

$= \ln 2\cdot 2^{x_0}$

- Sia f derivabile in x_0 e $a\in\mathbb{R}$. La funzione $f(ax)$ nasce dalla composizione

$$x \xrightarrow{a\cdot(\,)} ax \xrightarrow{f} f(ax)$$

Dunque

$$D(f(ax)) = a f'(ax)$$

Casi particolari:

- $D(e^{ax}) = a\cdot e^{ax}$

e quindi

$$D(c^x) = D(e^{(\ln c)x}) = (\ln c)c^x$$

$$D(e^{-x}) = -e^{-x}$$

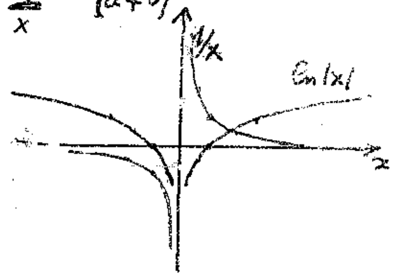
- $D(\ln ax) = a\cdot\frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$ $\quad (a\neq 0)$

e quindi

$$D(\ln(-x)) = \frac{1}{x}$$

e complessivamente

$$\rightarrow D(\ln|x|) = \frac{1}{x} \leftarrow$$



... tenerlo presente quando cercheremo una funzione la cui derivata sia $\frac{1}{x}$.

Osservazione: derivando una funzione pari si ha una funzione dispari (e viceversa)

Esercizi. Calcolare le derivate di

1. $\log x - 5x^3 + 4\cos x$
2. $\frac{1}{2}x^2 + 2^x + 3$
3. $(\log_{10} x)^2$
4. $\operatorname{sen} x\cos x$
5. $\sqrt{1-2x^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$
6. x^x
7. $(1-x)^{2x}$