1

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^{\sqrt{2}}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{x-1=t}{=}\lim_{t\to 0}\frac{t}{(1+t)^{\sqrt{2}}-1}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\left[\frac{(1+t)^{\sqrt{2}}-1}{t}\right]}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

per $t\to 0$

$(1+t)^{\sqrt{2}}-1\sim\sqrt{2}\cdot t$ | : è vero anche $(1+t)^{\sqrt{2}}\sim 1+\sqrt{2}t$?

Si richiesta

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=[\infty^0]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n}\cdot\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=$$

$$=3\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\underbrace{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 1}}=3$$

altro modo di risolvere l'esercizio

$$\lim_{n\to+\infty}e^{\ln\sqrt[n]{2^n+3^n}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(3^n+2^n)}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\left(\ln 3^n+\ln\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{e^{\frac{n}{n}\ln 3}}_{3}\cdot\underbrace{e^{\ln\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}}_{\to e^0}$$

2

siano $f(x)$ e $g(x)$ asintotiche per $x\to c$ (eventualm. $c=\pm\infty$)

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}-1=1-1=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=0$$

se $g(x)\to 0$ per $x\to c$ dirò che

$f(x)-g(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$ e scriverò:

$$f(x)-g(x)=\underline{\underline{o}}(g(x))$$

o PICCOLO DI ...

$$\Longrightarrow\quad f(x)=g(x)+o(g(x))$$

~~con queste riflessioni possiamo procedere:~~

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\sqrt{2}}-1}{\sqrt{2}x}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left[(1+x)^{\sqrt{2}}-1\right]-\sqrt{2}x}{\sqrt{2}x}\cdot\sqrt{2}=0\cdot\sqrt{2}=0$$

$$\left[(1+x)^{\sqrt{2}}-1\right]-\sqrt{2}x=o(x)\quad\Longrightarrow$$

$$(1+x)^{\sqrt{2}}-1 = \sqrt{2}\,x + o(x)$$

$$(1+x)^{\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}\,x + o(x)$$

Ripasso degli asintotici in termini di $o(x)$

$\boxed{x \to 0}$

(approssimazioni delle funzioni in $x_0=0$ tramite polinomi di 1° grado — ... rette tangenti — o superiori)

$$\operatorname{sen} x \sim x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = x + o(x)$$

$$e^x - 1 \sim x \quad \Rightarrow \quad e^x - 1 = x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x) = x + o(x)$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad \Rightarrow \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

$$\operatorname{tg} x \sim x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x = x + o(x)$$

$$\left[\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = 0$$

$$\operatorname{arctan} x \sim x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctan} x = x + o(x)$$

Calcolo l'eq. della retta tangente al grafico di $f(x) = \operatorname{sen} x$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$

$$f(x_0) = f(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$$

coeff ang. della tang.: $f'(x_0) = \cos x_0 =$

$= \cos(0) = 1$

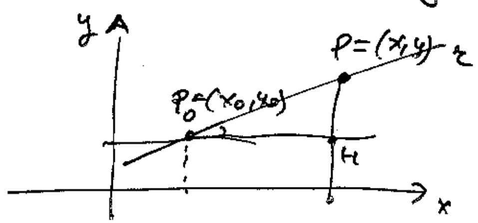
Calcolo l'eq. della retta (*) passante per $P = (x_0, f(x_0))$ e coeff ang. $m = f'(x_0)$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

$$y - 0 = 1\,(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = x$$

Ho verificato che il polinomio che approssima $\operatorname{sen} x$ in $x_0=0$ rappresenta proprio l'ordinata corrispondente a x sulla tangente in $x_0=0$

(*) Calcolo della retta per un punto (x_0, y_0) e con coeff. ang. m.



$$m = \frac{\overrightarrow{HP}}{\overrightarrow{P_0H}} = \frac{y-y_0}{x-x_0}$$

$$\Rightarrow \quad y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

Mnemonicamente, se ricordo che l'eq. canonica della retta è $y = mx + q$ basta dire che $P \in$ retta: $y_0 = m x_0 + q$ e sottrarre m.a.m.

ESERCIZI DATI LA VOLTA SCORSA (5)

$$\left[(\log_{10} x)^2 \right]' = \left(\log_{10} e \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot 2 (\log_{10} x)$$

$$x \xrightarrow[\log_{10}()]{} \log_{10} x \xrightarrow[()^2]{} (\log_{10} x)^2$$

$$(\operatorname{sen} x \cos x)' = \cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x) =$$
$$= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

$$\left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x\right)' = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 2x)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(2x)$$

$$\left(\sqrt{1-2x^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)' = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}} + \frac{1}{4(\sqrt{1-x})^3}$$

$$(\sqrt{1-2x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{1-2x^2}} \cdot (1-2x^2)' = \frac{-\cancel{4}^{2}x}{2\sqrt{1-2x^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)' = \frac{1}{2} \left[(1-x)^{-1/2}\right]' =$$

$$= \frac{1}{2} (1-x)^{-3/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1-x)' =$$

$$= +\frac{1}{4} (1-x)^{-3/2}$$

$$x \mapsto 1-x \xrightarrow{()^{-1/2}} G(x)$$

$$\left[(y)^{-1/2}\right]' = -\frac{1}{2} \cdot y^{-1/2-1} = -\frac{1}{2} y^{-3/2}$$

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' =$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} (e^x)' = e^x & (a^x)' = \ln a \cdot a^x & a>0 \ a\neq 1 \\ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} & & a \text{ fissato} \end{array}}$$

$$= e^{x \ln x} \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^x (\ln x + 1)$$

$$\left[(1-x)^{2x}\right]' = \left(e^{2x \ln(1-x)}\right)' =$$

$$= (1-x)^{2x} \cdot (2x \ln(1-x))' =$$

$$= (1-x)^{2x} \cdot \left(2 \ln(1-x) + \frac{-2x}{1-x}\right)$$

$$(\ln(ax))' \underset{a\neq 0}{=} a \cdot \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$$

$$x \xrightarrow{a()} ax \xrightarrow{\ln()} \ln(ax)$$

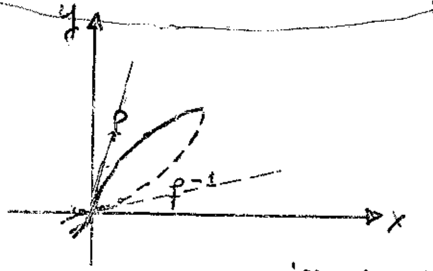
$$(\ln(-x))' = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(|x|) = \frac{1}{x}}$$

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA.

Sia $f: (a,b) \to B \subseteq \mathbb{R}$ (a,b eventualmente infiniti)
ed esista la funzione inversa: $f^{-1}: B \to (a,b)$.
Se
f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$
e
$\boxed{f'(x_0) \neq 0}$
allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e risulta

$$D(f^{-1})_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$



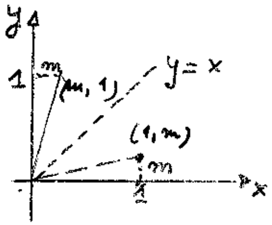


illustrazione con $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

Se $f'(x_0) = 0$ ....
vedi $y = x^3$ e la sua inversa $x = \sqrt[3]{y}$

ATTENZIONE: così formulato il teorema va bene per calcolare i singoli valori della derivata.
Se vogliamo la "funzione derivata di $f^{-1}(y)$" serve ricondurre a y la variabile che compare al 2° membro: $x_0 = f^{-1}(y_0)$

Esempio: $y = tg\, x$ è invertita tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ da
$x = arctg\, y$.

$$D\, arctg\, y = \frac{1}{D\, tg x} = \frac{1}{1 + tg^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

funzione in x!

concetto di funzione derivata

$f: (a, b) \to \mathbb{R}$

Suppongo che f abbia derivata in ogni punto $x_0 \in (a, b)$

$\forall\, x_0 \in (a, b) \longmapsto f'(x_0)$

al variare di x_0 ho una funzione che chiamo <u>funzione derivata</u> di f, e denoto con $f'(x)$.

Derivata di $\arctan y = x$
che vedo come funz. inversa di $y = \tan x$, con dominio $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e immagine $\mathbb{R}$.

$$(\arctan y)'_{y_0 = \tan x_0} = \frac{1}{(\tan x)'_{x=x_0}} =$$

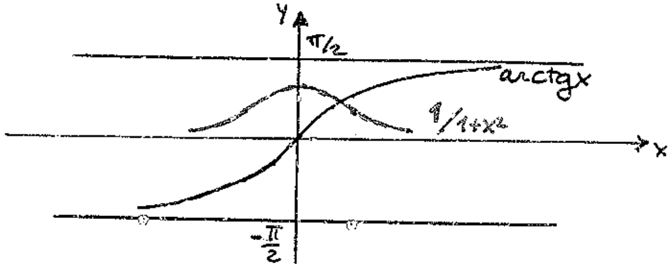
$$= \frac{1}{1 + (\tan x_0)^2} = \frac{1}{1 + y_0^2}$$

Quindi

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

Riesprimendo anche la funzione inversa nella variabile x abbiamo

$$D(\text{arctg}\, x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$



• Similmente

sen: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ è invertita da arcsen, cioè

$y = f(x) = \text{sen}\, x$ e $x = f^{-1}(y) = \text{arcsen}\, y$

$$\Rightarrow D\,\text{arcsen}\, y = \frac{1}{D(\text{sen}\, x)_{x=\text{arcsen}\, y}} = \frac{1}{(\cos x)_{x=\text{arcsen}\, y}} = ?$$

se $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\cos x \geq 0 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\text{sen}^2 x} = \sqrt{1-y^2}$

$$\Rightarrow D\,\text{arcsen}\, y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$: e $(\text{arcsen}\, x)'$ è def. su $(-1,1)$

∘ Similmente

cos: $[0,\pi] \to [-1,1]$ è invertita da arccos, cioè

$y = f(x) = \cos x$ e $x = f^{-1}(y) = \arccos y$

$$\Rightarrow D\,\arccos y = \frac{1}{D(\cos x)_{x=\arccos y}} = \frac{-1}{(\text{sen}\, x)_{x=\arccos y}} = ?$$

se $x \in [0,\pi]$, $\text{sen}\, x \geq 0 \Rightarrow \text{sen}\, x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-y^2}$

$$\Rightarrow D\,\arccos y = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$: e $(\arccos y)'$ è def su $(-1,1)$

Se $f(x)$ è una funz. dispari (pari) $f'(x)$ è necessariamente pari? (dispari)

Sì per il teor. di derivaz. delle funz. composte:

se $f(-x) = -f(x)$

vuol dire $f'(-x)\cdot(-x)' = -f'(x)$

$$-f'(-x) = -f'(x)$$

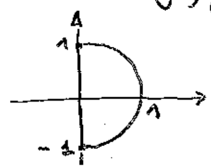
$$f'(-x) = f'(x)$$

quindi f' è pari!

$x = \text{arcsen}\, y$ è l'inversa di $y = \text{sen}\, x$ con dominio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e immagine $[-1,1]$.

$y_0 = \text{sen}\, x_0 \qquad x_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$(\text{arcsen}\, y)'_{y=y_0} = \frac{1}{(\text{sen}\, x)'_{x=x_0}} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1-(\text{sen}\, x_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$$



$(\text{sen}\, x_0)^2 + (\cos x_0)^2 = 1$

$(\cos x_0)^2 = 1 - (\text{sen}\, x_0)^2$

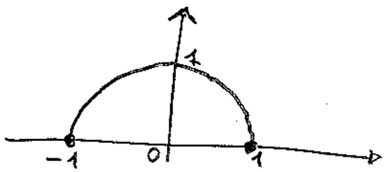
$\cos x_0 \geq 0 \Rightarrow \cos x_0 = \sqrt{1-(\text{sen}\, x_0)^2}$

$x = \arccos y$ è l'inversa di $y = \cos x$ con dominio $[0, \pi]$ e l'immagine $[-1, 1]$. $y_0 = \cos x_0$

$$(\arccos y)'_{y=y_0} = \frac{1}{(\cos x)'_{x=x_0}} =$$

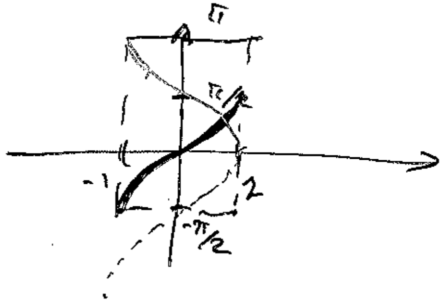
$$= \frac{1}{-\operatorname{sen} x_0} = \frac{1}{-\sqrt{1-(\cos x_0)^2}} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-y_0^2}}$$



$$\begin{cases} (\operatorname{sen} x_0)^2 = 1-(\cos x_0)^2 \\ \operatorname{sen} x_0 \geq 0 \end{cases}$$

$$(\arccos y)' = -(\arcsen y)'$$



per motivi di simmetria (e traslazione)

Continuità delle funzioni derivabili:

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ una funz. derivabile in $x_0 \in (a,b)$. Allora $f(x)$ è continua in x_0.

Dim. Devo provare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{o anche che}$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Cerco una rappresentazione comoda di $f(x_0+h)$.

So che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right] = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - h f'(x_0)}{h} = 0$$

cioè

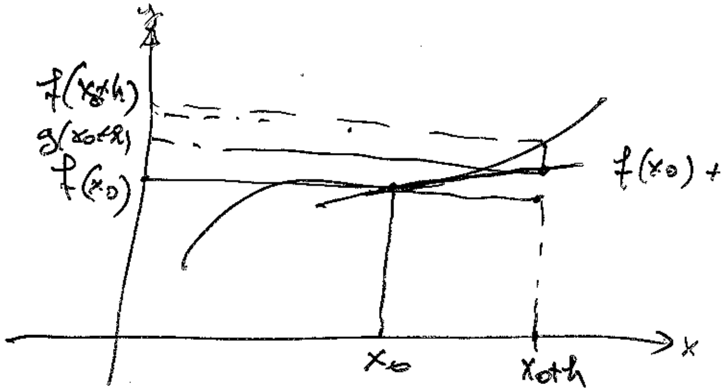
$$f(x_0+h) - f(x_0) - h f'(x_0) = o(h)$$

cioè

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + o(h)}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = \lim_{h \to 0} f(x_0) + h f'(x_0) + o(h) = f(x_0)$$

C.V.D.



$$f(x_0+h) = \underline{f(x_0) + h\, f'(x_0)} + o(h)$$

equazione della tangente in $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = g(x)$$

$f(x_0) + h\, f'(x_0)$ è il valore della funzione $g(x)$ in x_0+h

Quindi $f(x_0+h) = g(x_0+h) + o(h)$.

la formula dice che se h diventa piccolo posso identificare il valore di $f(x_0+h)$ con quello di $g(x_0+h)$ (che chiamerò valore calcolato lungo la tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$).

$\Longrightarrow$ <u>differenziale</u>

ATTENZIONE

1) Continua non implica derivabile

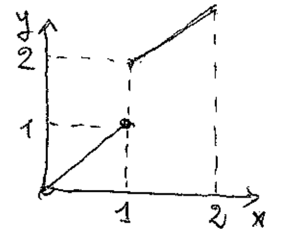
vedi $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0 \quad \text{ma}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = 1 \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = -1$$

2) La prima cosa da verificare, se devo stabilire se $f(x)$ è derivabile in x_0 e la funzione ha una forma "inconsueta", è se $f(x)$ è continua in x_0.

In particolare non basta che esistano
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to x_0^+} f'(x)\\ \lim_{x\to x_0^-} f'(x)\end{array}\right\}\text{ e siano uguali}$$



Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x\in[0,1] \\ x+1 & \text{se } x\in(1,2] \end{cases}$$

Non è continua in $x_0 = 1$ e quindi non è derivabile in $x_0 = 1$ anche se $f'(x) = 1 \quad \forall x \neq 1$ e quindi

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 1 = \lim_{x\to 1^+} f'(x).$$