(1

$$\lim_{n\to+\infty} \left(3^{1/n}-1\right)^{\frac{1}{\ln n}} = \left[0^0\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(3^{1/n}-1)\cdot\frac{1}{\ln n}} = \left[e^{\frac{\infty}{\infty}}\right]$$

$$3^{1/n}-1 = e^{1/n\cdot\ln 3}-1 = \frac{1}{n}\cdot\ln 3+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\boxed{\text{se } x\to 0 \quad e^{x}-1 = x+o(x)}$$

$$\Rightarrow \ln\left(3^{1/n}-1\right) = \ln\left(\frac{\ln 3}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sim$$

$$\sim \ln\left(\frac{\ln 3}{n}\right) = -\ln n+\ln(\ln 3)$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(3^{1/n}-1)}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\cancel{\ln n}+\ln(\ln 3)}{\cancel{\ln n}} =$$

$$= -1+\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(\ln 3)}{\ln n} = -1$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(3^{1/n}-1\right)^{1/\ln n} = e^{-1}$$

ATTENZIONE
È STATO SEGNALATO
UN ERRORE
NELLO SVOLGIMENTO FATTO IN CLASSE!!
QUI È CORRETTO

È vero:

se $x\to 0+$ $\quad \ln(x+o(x)) \sim \ln x$?

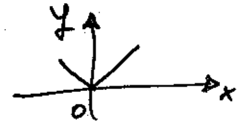
sì. Spiego su un es. Se $o(x)=x^2$

$$\ln(x+x^2) = \ln(x(1+x)) = \underbrace{\ln x}_{\sim\ln x}+\underbrace{\ln(1+x)}_{\to 0}$$

(2

Controesempio all'asserzione "le funz. continue sono derivabili"

$f(x)=|x|$: non è derivabile in $x=0$



ma è una funz continua in ogni suo punto e in part. in $x_0=0$

La funzione $f(x)=\begin{cases} x^2\,\text{sen}\,\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$

è derivabile nell'origine?

Provo a calcolare $f'(x)$ e a trovarne

$\lim_{x\to 0+} f'(x)$ e $\lim_{x\to 0-} f'(x)$

$$f'(x) = 2x\cdot\text{sen}\,\frac{1}{x}+\cancel{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{\cancel{x^2}} =$$

$$= 2x\,\text{sen}\,\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^{\pm}}\left(2x\,\text{sen}\,\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^{\pm}} 2x\,\text{sen}\,\frac{1}{x} - \lim_{x\to 0^{\pm}}\cos\frac{1}{x} = 0 + \text{NON ESISTE}$$

$\Rightarrow$ non esiste.

È vero che non esiste $f'(0)$? NO !!

Calcolo il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h \operatorname{sen}\frac{1}{h} = 0$$

$\Rightarrow \quad f'(0)=0$

In questo caso la funzione derivata non è continua in $x=0$ (ha disc. di 2ª specie)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \leq -1 \\ x^3+x^2+x & \text{se } -1 < x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

In quali punti è derivabile?

All'interno di ogni intervallo $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1]$, $(1,+\infty)$ è rappresentata da un polinomio $\Rightarrow$ è derivabile

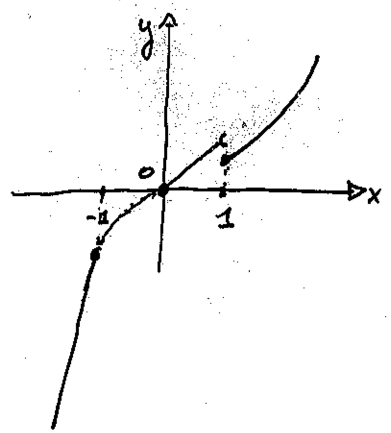
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \in (-\infty,-1) \\ 3x^2+2x+1 & \text{se } x \in (-1,0) \\ 1 & \text{se } x \in (0,1) \\ x & \text{se } x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = 3 \neq \lim_{x\to -1^+} f'(x) = 2$ NON DERIV. in $x=-1$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1 \qquad ?$

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 1 \qquad ?$

Allora è vero che $f(x)$ è derivabile in $x_0=0$ e in $x_0=1$?



RICORDO che

$\boxed{\text{una funzione derivabile in } x_0 \text{ è cont. in } x_0.}$

Ora in $x_0=0$ $f(x)$ è continua

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1 = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$

e quindi $f(x)$ è derivabile in $x_0=0$

Invece in $x_0=1$ $f(x)$ non è continua e quindi non può essere derivabile.

E difatti se faccio

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - \frac{1}{2}\cdot 1^2}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h+\frac{1}{2}h^2}{h} = 1$$

invece

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h) - \frac{1}{2}\cdot 1^2}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}+h}{h} = -\infty$$

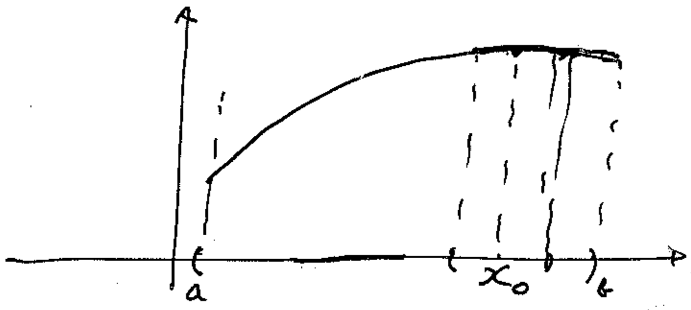
TEOR. SE la funz f è cont. in x_0 ed esistono $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ e $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ e sono uguali, allora f è derivabile in x_0 e la sua derivata coincide con i limiti

Def. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Sia $x_0\in(a,b)$.

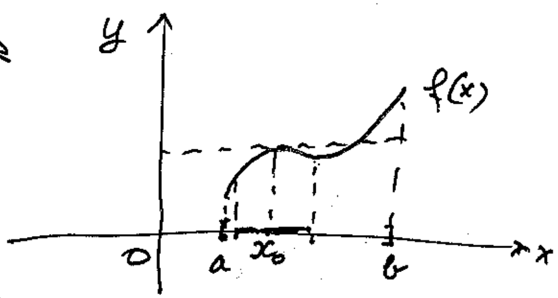
Dico che x_0 è <u>un punto di massimo locale</u> se

esiste un intervallo aperto contenente x_0, $U=(x_0-\delta,x_0+\delta)$, e contenuto in (a,b) tale che si abbia

$$f(x)\le f(x_0)\quad \forall x\in U$$



$f:[a,b]\to\mathbb{R}$



x_0 punto di max locale

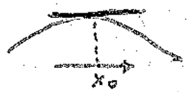
Il massimo di $f(x)$ è $f(b)$ (e b è punto di massimo assoluto). Ma b non è punto di max locale poiché b non è "interno" all'intervallo $[a,b]$ e quindi non esiste un intervallo $(b-\delta,b+\delta)$ contenuto in (a,b) in cui $f(b)$ sia il valore MAX.

TEOREMA (FERMAT). $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

Sia $x_0\in(a,b)$. Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo locale e che f sia derivabile in x_0.

Allora $f'(x_0)=0$.

Commento: stiamo dicendo che se la derivata è presente in x_0, punto di MAX locale, l'andamento sarà del tipo



oppure

Ma se la derivata non c'è potrei avere

Dim. La derivata esiste: esiste finito (*)

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$$

Esamino il rapp. incrementale per $h>0$

N: $f(x_0+h)-f(x_0)\le0$ poiché in un intorno sufficientemente piccolo di x_0, $f(x_0)$ è massimo.

D: $h>0$

$$\Longrightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\le0$$

per la conseguenza del T. della permanenza del segno:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\le0$$

Simmetricamente se $h<0$: rapporto increm. ≥0

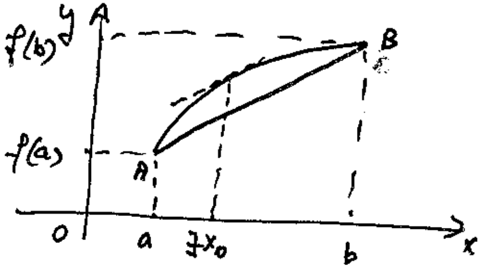
$\Rightarrow$ T.P.S.

$$f'(x_0)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ge0$$

Confrontando le 2 disug.: $f'(x_0)=0$ CVD

TEOREMA di LAGRANGE. Se $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($[a,b]$ chiuso e limitato) è continua in $[a,b]$ allora esiste almeno un punto $x_0 \in [a,b]$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Per dimostrarlo incominciamo a vedere se la cosa funziona quando $f(a) = f(b)$ (T. di ROLLE)

Due casi in dipendenza da ....

$\boxed{\text{la funz. } f \text{ è cont. in } [a,b] \text{ e quindi (T.W.) è dotata di MAX e min ASSOLUTI}}$

1) MAX e min possono essere assunti negli estremi dell'intervallo $[a,b]$. Ad es. $f(a)=m$, $f(b)=M$
Allora $\forall x \in [a,b)$

$$f(a) = m \leq f(x) \leq M = f(b) \overset{IP}{=} f(a)$$

$\Longrightarrow$ $\forall x \in [a,b]$ risulta $f(x) = f(a)$, funz costante

$\Longrightarrow$ $\forall x_0 \in (a,b)$: $f'(x_0) = 0$

2) se almeno 1 tra i due estremi assoluti non è assunto negli estremi (ad es. il MAX)
$\exists x_0 \in (a,b)$ t.c. il valore max M è $= f(x_0)$

esiste quindi un intervallo $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b)$ su cui $f(x_0)$ è massimo $\Rightarrow$ x_0 è un punto di max locale

f è derivabile, x_0 è pto di max locale $\overset{T.F.}{\Longrightarrow}$ $f'(x_0) = 0$.

Abbiamo provato il T. ROLLE.

Considero la funzione $g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ che ha per grafico la retta AB.

La differenza

$$f(x) - g(x) \quad \text{è una funzione t.c.}$$

1) continua su $[a,b]$
2) derivabile su (a,b)
3) $f(a) - g(a) = 0 = f(b) - g(b)$

Le posso applicare T. ROLLE

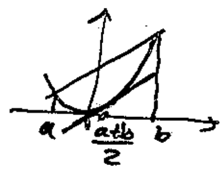
$\exists x_0$ t.c. $f'(x_0) - g'(x_0) = 0 \Longrightarrow f'(x) = g'(x_0)$

ma $g'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. c.v.d.

Applico il teor. di Lagrange a $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[a,b]$.

$\exists x_0$ t.c. $2x_0 = \frac{b^2-a^2}{b-a} = b+a$

$\Longrightarrow x_0 = \frac{b+a}{2}$



....

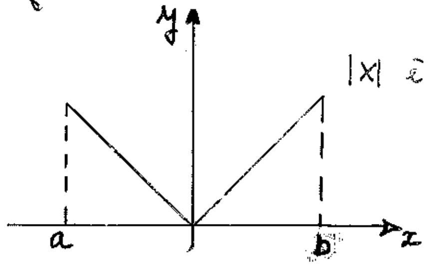
$f(x) = 1/x$

DERIVATE E ....

(pagina di riepilogo dei teoremi visti fin qui)

- Se $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ allora $f(x)$ è continua in x_0.

Il viceversa è falso



$|x|$ è continua in $x_0 = 0$

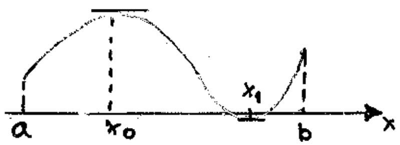
- Se $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ ha in $x_0 \in (a,b)$ (interno ad (a,b)) un punto di massimo relativo e f è derivabile in x_0 allora

$$f'(x_0) = 0$$

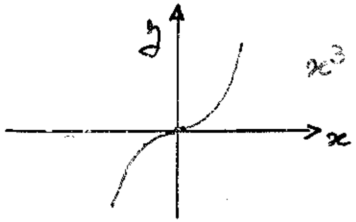
Idem se x_1 è un punto di minimo relativo

(Sul testo: ESTREMI LOCALI)

TEOR. DI FERMAT



ATTENZIONE: il viceversa è falso

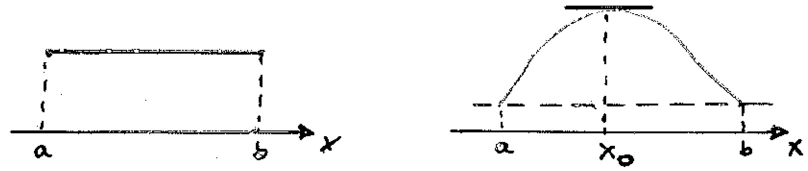


$x_0 = 0$ è un punto a tangente stazionaria MA non estremo locale

Però

- TEOR. di ROLLE: se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) e $f(a) = f(b)$, sicuramente esiste in (a,b) ALMENO ~~un~~ punto x_0 t.c.

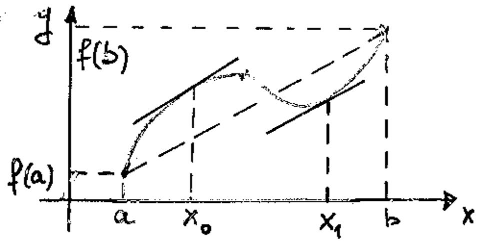
$$f'(x_0) = 0$$



Più in generale

- TEOREMA di LAGRANGE: se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) sicuramente esiste in (a,b) ALMENO ~~un~~ punto x_0 t.c.

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



Provare con $f(x) = x^2$ o $f(x) = \frac{1}{x}$

Se ne deduce il test di monotonia e il metodo per la ricerca di massimi e minimi locali.

Dim. dei Teoremi di monotonia.

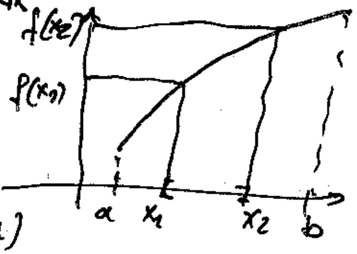
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont. in $[a,b]$, deriv. in (a,b), $f'(x)>0\ \forall x\ (a,b)$.

Voglio provare che f è monot. cresc. cioè

$\boxed{TS}$ $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ se $x_1<x_2$ allora $f(x_1)<f(x_2)$

su $[x_1,x_2]$ valgono le ip. di LAGR.

$$\exists x_0\in[x_1,x_2]: \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x_0)$$



$$f(x_2)-f(x_1)=f'(x_0)(x_2-x_1)$$

$f'(x_0)>0$ per ipotesi

$x_2>x_1 \Rightarrow x_2-x_1>0$ $\Bigg|\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>0$

$\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$. C.V.D.

Allo stesso modo vedo che se $f'(x)<0\ \forall x\in(a,b)$, f è decresc. in (a,b)

La stessa dimostrazione prova anche che se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, cont. in $[a,b]$ e deriv in (a,b) e $f'(x)=0\ \forall x\in(a,b)$ allora $f(x)$ è costante, poiché $\forall x_1,x_2\in(a,b): f(x_1)=f(x_2)$

Def. <u>di primitiva di una funzione.</u>

Sia f una funz. cont. su $[a,b]$

Dico che F è <u>una primitiva di</u> f su $[a,b]$ se

$$F'(x)=f(x)\quad \forall x\in[a,b]$$

(*) Se $F(x)$ e $G(x)$ sono primitive di $f(x)$ su $[a,b]$ allora differiscono per una costante c.

<u>Dim.</u> $F(x)-G(x)$ è una funz derivabile poiché lo sono $F(x)$ e $G(x)$. Inoltre $\forall x\in(a,b)$ $F'(x)=f(x)$

$G'(x)=f(x) \Rightarrow (F(x)-G(x))'=f(x)-f(x)=0$

$\Rightarrow$ per le conseg. del teor. di Lagrange.

$$F(x)-G(x)=C$$

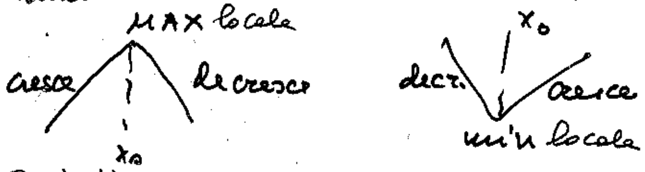
c.v.d.

(**) So anche che se $F(x)-G(x)=C$ si ha $F'(x)-G'(x)=0 \Rightarrow F'(x)=G'(x)$

Unendo i 2 risultati ho che tutte e sole le primitive di una stessa funzione f si ottengono sommando a una primitiva tutte le possibili costanti $C\in\mathbb{R}$.

Come conseguenza dei teor. di monotonia:
METODO DI DETERMINAZ dei MAX e min locali

Quando ho MAX o min. locale?



Quindi:

Devo stabilire in quali punti cambia il segno di $f'(x)$: se $f'(x)\geq 0$ per $x<x_0$ e $f'(x)\leq 0$ per $x>x_0$: x_0 MAX locale (min. loc.)

Invece per $f(x)=x^3$ in $x_0=0$ $f'(x)=3x^2\geq 0$ sempre $\Rightarrow$ non ci può essere MAX o min.