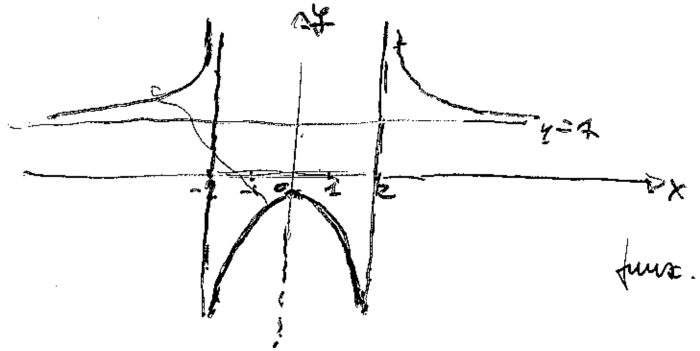
(1)

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{x^2-4+5}{x^2-4} = 1 + \frac{5}{x^2-4}$$

I.D. $x^2-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$



$x^2-4 > 0 \iff x>2$ o $x<-2$

funz. pari

$f(0) = -\frac{1}{4}$

pensando alla $f(x)$ come somma di funz elementari (o quasi) posso tracciare questo grafico di massima.

($\lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = \pm\infty$: ho guardato il segno di $\frac{5}{x^2-4}$)

Per precisare
Studio il segno di:

$$f'(x) = 0 + \frac{0\cdot(x^2-4) - 5(2x-0)}{(x^2-4)^2} = \frac{-10x}{(x^2-4)^2} \geq 0$$

$$\iff \begin{cases} x \neq \pm 2 & (\Rightarrow \text{denom} > 0) \\ -10x \geq 0 \end{cases} \iff x \in (-\infty,-2) \text{ oppure } x \in (-2,0]$$

$\Rightarrow f(x)$ cresce nell'intervallo $(-\infty,-2)$
e nell'intervallo $(-2,0)$
ha max relativo in $x=0$
Invece $f(x)$ decresce in $(0,2)$ e in $(2,+\infty)$
NON SULLA UNIONE DI INTERVALLI!

(2)

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-4}$$

I.D. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\} = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$

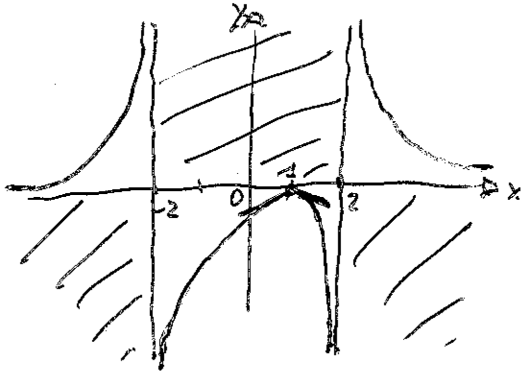
Segno: $f(x) \geq 0$

N: $|x-1| \geq 0 \quad \forall x \in$ I.D.

D: $x^2-4 > 0 \iff x<-2$ o $x>2$

quindi $f(x) \geq 0$ in $(-\infty,-2)$ e in $(2,+\infty)$
≤ 0 in $(-2,2)$

$f(x) = 0$ per $x=1$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

asint orizz: $y=0$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{f(x)}_{\boxed{x<1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{x^2-4} = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-1}{x^2-4} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{x^2-4} = -\infty \; ; \; \lim_{x\to -2^{\pm}} \underbrace{f(x)}_{x<1} = \lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{1-x}{x^2-4} = \mp\infty$$

Monotonia:

$f'(x) = ?$ $\qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-4} & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1-x}{x^2-4} & \text{se } x<1 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \text{se } x \geq 1 \text{ e } x \neq 2: & \frac{1\cdot(x^2-4) - 2x(x-1)}{(x^2-4)^2} \\ \text{se } x<1 \text{ e } x \neq -2: & \frac{-1\cdot(x^2-4) - 2x(1-x)}{(x^2-4)^2} \end{cases}$$ CIOÈ:

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x-4}{(x^2-4)^2} \cdot \operatorname{sgn}(x-1)$$

La derivata è definita per $x \neq \pm 2$, e $x \neq 1$

$$\lim_{x \to 1^\pm} f'(x) = \frac{-1+2-4}{9} \operatorname{sgn}(x-1) \begin{cases} x \to 1^+ : -1/3 \\ x \to 1^- : 1/3 \end{cases}$$

in $x=1$ c'è un punto angoloso con tg da sinistra: $y = \frac{1}{3}(x-1)$ e da destra $y = -\frac{1}{3}(x-1)$

Studio il segno di $f'(x)$

$-x^2+2x-1-3 = -(x-1)^2-3 < 0$

$(x^2-4)^2 > 0$ se $x \neq \pm 2$

$\Rightarrow$ $f'(x) > 0$ se $\begin{cases} \operatorname{sgn}(x-1) < 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$

$f'(x) < 0$ se $\begin{cases} \operatorname{sgn}(x-1) > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $f(x)$ cresce in $(-\infty,-2)$ e in $(-2,1)$

decresce in $(1,2)$ e in $(2,+\infty)$

e ha un massimo relativo in $x=1$ $\quad (f(1)=0)$

Possiamo così completare il grafico

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+4}{x}}$: Troviamo gli estremi relativi.

Devo comunque trovare $ID(f(x))$

$\dfrac{x^2+4}{x} \geq 0 \Rightarrow x > 0$. $ID = (0,+\infty)$

Studio il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}} \cdot \frac{2x \cdot x - (x^2+4)\cdot 1}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2 \cdot 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}} \geq 0$$

Siamo nell'intervallo $(0,+\infty)$. Quindi $2x^2 > 0$; $\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}$ è definita ed è >0 poiché $x^2+4 \geq 4$

$$\Rightarrow \left\{ f'(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x \in (0,+\infty) \end{cases} \right\}$$

$$\iff \begin{cases} x \leq -2 \quad o \quad x \geq 2 \\ x > 0 \end{cases} \iff x \geq 2$$

Allora $f(x)$ è crescente in $(2,+\infty)$

è decrescente in $(0,2)$

$\Rightarrow$ ha un minimo relativo in $x=2$ $\quad f(2) = \sqrt{\frac{4+4}{2}} = 2$

Il minimo è anche assoluto perché?

perché per $x \in (0,2)$ la funzione decresce e quindi $\forall x \in (0,2)$ si ha $f(x) > f(2)$

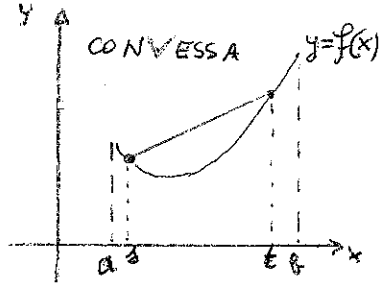
e in $(2,+\infty)$ la funz. è crescente e quindi $\forall x \in (2,+\infty)$: $f(x) > f(2)$; questa è la def. di minimo

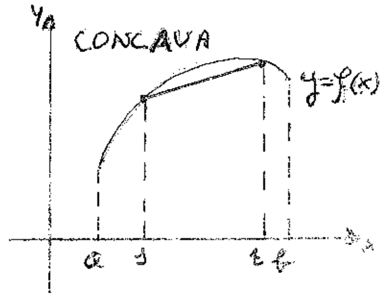
Ancora uso del teor. di Lagrange e sue conseguenze

- Studio della convessità - concavità ...

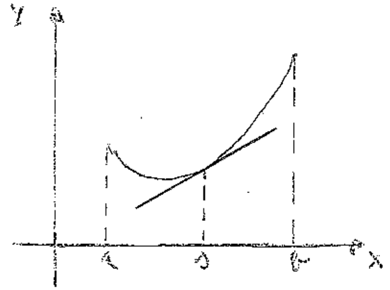
Dico che $f(x)$ è convessa in $[a,b]$ se per tutti gli $s,t \in [a,b]$ il segmento che congiunge $(s,f(s))$ con $(t,f(t))$ sta SOPRA il grafico di f relativo all'intervallo $[s,t]$

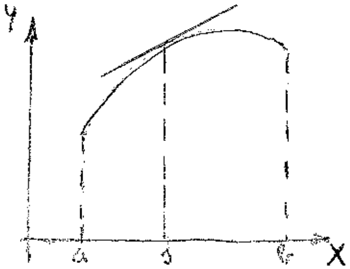
(è concava ... se sta SOTTO)





NOTARE: se la funzione è derivabile in $[a,b]$ in ogni punto del grafico, $(s,f(s))$ è definita la TANGENTE. Dove stanno le tangenti nei due casi?





E che cosa fa il coefficiente angolare della tangente al variare di s in (a,b), nei due casi?
Se f è convessa in (a,b) allora f' cresce in (a,b)

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto $x_0 \in (a,b)$. Allora è definita la funzione derivata di f:

$$f' : (a,b) \to \mathbb{R}$$

e posso $\forall x_0 \in (a,b)$ chiedermi se esiste

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}$$

se esiste ed è finito (cioè se esiste la derivata di $f'(x)$ in x_0) dirò che esiste la derivata seconda di f in x_0

$$f''(x_0) = \left(f'(x)\right)'_{x=x_0}$$

$\forall x_0 \in (a,b)$ su cui è definita $f''(x_0)$ si istituisce una corrispondenza univoca

$$x_0 \longmapsto f''(x_0)$$

funzione che chiamo derivata seconda di $f(x)$

Per stabilire se f è concava o convessa calcolo il segno della funzione derivata seconda di f. Infatti:

Enunciato così sono condizioni necessarie di convessità (f convessa ⇒ f' cresce (o f concava ⇒ f' decresce)) (concavità). Usando il teor. di Lagrange si fa vedere che sono anche sufficienti, cioè

se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile, essa è convessa se e solo se la sua derivata $f'(x)$ è una funzione crescente

(è concava ... $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ decrescente)

Se esiste anche la derivata della derivata prima (= derivata seconda: $f''(x)$) in (a,b) allora

f convessa $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ in (a,b) con $=0$ in punti isolati

f concava $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ in (a,b)

Esempi

$f(x)=x^2$ è convessa in $\mathbb{R}$

$f(x)=\ln x$ è concava in $(0,+\infty)$: $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

$f(x)=x^3$ è ......

Punti di flesso = punti in cui cambia la concavità

Es. $f(x) = x^2$ $(a,b)=\mathbb{R}$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f(x)$ è convessa in ogni intervallo reale.

$f(x)=x^3$ $(a,b)=\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ cresce su $\mathbb{R}$

$f''(x) = 6x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

quindi $f(x)$ è concava in $(-\infty,0)$ e convessa in $(0,+\infty)$ e in 0 c'è un cambio di concavità che chiamo flesso ($x=0$ invece si chiama PUNTO di flesso)

$f(x) = \ln x$ def in $(0,+\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{x} > 0$ $\Rightarrow$ $f(x) = \ln x$ cresce

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow$ $\forall x \in (0,+\infty)$ è <0 $\Rightarrow f(x)$ concava.

Teorema di de l'Hospital per il calcolo dei limiti con forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

∘ Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili

∘∘ Sia $g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$

∘∘∘ Se $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$

∘∘∘∘ ed esiste $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

allora $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Ipotesi ∘∘∘ può essere sostituita da $\lim_{x \to a+} f = \lim_{x \to a+} g = \pm\infty$

$f(x) = -2x + \ln(e^x - 4)$.

I.D. $e^x > 4 \Rightarrow x > \ln 4$: $(\ln 4, +\infty)$

$\lim_{x \to (\ln 4)^+} f(x) = -\infty$ asint. verticale $x = \ln 4$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = [-\infty + \infty]$?

$= \lim_{x \to +\infty} -2x + \ln e^x\left(1 - \frac{4}{e^x}\right) =$

$= \lim_{x \to +\infty} -2x + \ln e^x + \underbrace{\ln\left(1 - \frac{4}{e^x}\right)}_{} =$

$= \lim_{x \to +\infty} -2x + x = -\infty$

asintoti obliqui ?

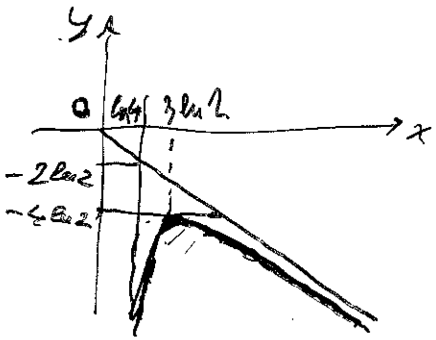
$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x} = -1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) + 1 \cdot x =$

$\lim_{x \to +\infty} -\cancel{2x} + \cancel{x} + \ln\left(1 - \frac{4}{e^x}\right) + \cancel{x} =$

$= 0$

Asintoto obliquo: $y = -x$



Monotonia

$f'(x) = -2 + \frac{1}{e^x - 4} \cdot (e^x - 0) = \frac{e^x - 2e^x + 8}{e^x - 4} =$

$= \frac{8 - e^x}{e^x - 4} \geq 0$: nell'I.D. $(\ln 4, +\infty)$, Den > 0.

Quindi $\begin{cases} 8 - e^x \geq 0 \\ x \in (\ln 4, +\infty) \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq \ln 8 \\ x > \ln 4 \end{cases} \Rightarrow f'(x) > 0$ in $(\ln 4, \ln 8)$

< 0 in $(\ln 8, +\infty)$

$= 0$ in $\ln 8$

che è punto di MAX relativo e assoluto

$f(\ln 8) = -2\ln 8 + \ln(8-4) =$

$= -6\ln 2 + 2\ln 2 = -4\ln 2$

Concava ?

$f'(x) = -2 + \frac{e^x}{e^x - 4}$

$f''(x) = 0 + \frac{e^x(e^x - 4) - e^x e^x}{(e^x - 4)^2} = \frac{-4e^x}{(e^x - 4)^2}$

$-4e^x < 0 \quad \forall x \in$ I.D.

$(e^x - 4)^2 > 0 \quad \forall x \in$ I.D. $\Rightarrow f(x)$ concava.

$f(x) = 4x - (x+1)\ln\left[(x+1)^2\right]$

I.D. $x \neq -1$

Coincide con $4x - 2(x+1)\ln(x+1)$?

non su tutto l'I.D. (solo su $(-1, +\infty)$)

$f'(x) = 4 - 1 \cdot \ln(x+1)^2 - (x+1) \cdot \frac{2(x+1) \cdot 1}{(x+1)^2} =$

$= 4 - \ln(x+1)^2 - 2 = 2 - \ln(x+1)^2 \geq 0$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \leq e^2 \\ x \neq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} -e \leq x+1 \leq e \\ x \neq -1 \end{cases}$

$f(x)$ cresce in $(-1-e, -1)$ e in $(-1, e-1)$; decresce in $(-\infty, -1-e)$ e in $(e-1, +\infty)$