Per studiare una funzione

Indispensabile

- I.D.
- limiti negli estremi dell'I.D.
- monotonia
- grafico

Accessorio

segno e zeri (se è complicato si rimanda a dopo lo studio della monotonia)

[parità (molto accessoria)]

[periodicità]

presenza di asintoti (se ragionevole ipotizzarle)

MAX, min relativi (valori assunti nei pti di M, m)

valore in qualche punto strategico. e tangente nel punto del grafico

concavità, convessità e punti flesso (+ retta tangente)

Esercizio (24/2/2011) da fare a casa:

$$f(x) = \ln(6x - x^2) + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$$

ID. lim (asintoti)
Monotonia, estremi relativi e valori tangenti al grafico in $x=1$ e $x=5$

Esistono zeri? Localizzarli

INTEGRAZIONE ???

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$. Certamente ha primitiva ($\Leftarrow$ TEOR. FOND. DEL CALCOLO): $F(x)$ e quindi ne ha infinite

$$\left\{ F(x) + c,\ c \in \mathbb{R} \ \middle|\ F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b] \right\}$$

Questo insieme di primitive di $f(x)$ si chiama INTEGRALE <u>INDEFINITO</u> di $f(x)$

Lo si indica scrivendo

$$\int f(x)\,\underline{dx} =$$

$$= \left\{ F(x) + c,\ c \in \mathbb{R} \ \middle|\ F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b] \right\}$$

$$= F(x) + c$$

dal punto di vista formale è una schifezza ma diventa una abbreviazione accettabile

---

2) Integrale definito (Cauchy - Riemann) NUMERO
3) Funzione integrale : FUNZIONE
4) Integrale improprio : LIMITE
5) Integrale di un'equazione differenziale : INSIEME di FUNZIONI

$\downarrow$

Generalizzazione dell'integr. indefinito

Tutte queste sono accezioni diverse della parola INTEGRALE

Primitive

13

Abbiamo visto che data una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua
le sue primitive su $[a,b]$ si possono ottenere tutte da una nota pur di aggiungere una costante (e quindi sono tante quanti i numeri reali)
Come calcolare le primitive ?

a) PRIMITIVE ELEMENTARI

- $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ $\Rightarrow$ una primitiva di x^β (se $\beta\neq-1$) è $\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}$
- $D(\ln|x|) = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ una primitiva di x^{-1} è $\ln|x|$
- $D(e^x) = e^x$ $\Rightarrow$ " " " e^x è e^x
- $D(a^x) = \ln a \cdot a^x$ $\Rightarrow$ " " " a^x è $\frac{a^x}{\ln a}$
- $D(\operatorname{sen}x) = \cos x$ $\Rightarrow$ " " " $\cos x$ è $\operatorname{sen}x$
- $D(\cos x) = -\operatorname{sen}x$ $\Rightarrow$ " " " $\operatorname{sen}x$ è $-\cos x$
- $D(\operatorname{tg}x) = 1+\operatorname{tg}^2x = \frac{1}{\cos^2x}$ $\Rightarrow$ " " " $1+\operatorname{tg}^2x$ è $\operatorname{tg}x$
  $\frac{1}{\cos^2x}$ "
- $D(\operatorname{arctg}x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\Rightarrow$ una " " $\frac{1}{1+x^2}$ è $\operatorname{arctg}x$

b) Metodi di integrazione : sono riletture delle principali regole di derivazione:

- derivazione della somma
- per scomposizione $\Leftarrow$ derivazione del prodotto per un numero
- per parti $\Leftarrow$ derivazione del prodotto di funzioni
- per sostituz. $\Leftarrow$ derivazione di funzione composta.

---

cerco una funzione che come derivata dia x^β (4)

$(kx^\alpha)' \overset{?}{=} x^\beta$?

$k\alpha x^{\alpha-1} = x^\beta$ $\Rightarrow$ $\alpha-1=\beta$ $\Rightarrow$
$k\alpha = 1$

$\Rightarrow$ $\alpha = \beta+1$
$k = \frac{1}{\beta+1}$ se $\beta+1\neq0$

Cioè se $\beta\neq-1$ posso dire che una primitiva di x^β è : $\frac{1}{\beta+1}\cdot x^{\beta+1}$

Se invece $\beta=-1$ la funz. di cui cerco la primitiva è $x^{-1}=\frac{1}{x}$
e una primitiva di $\frac{1}{x}$ è $\ln|x|$.

Cerco una primitiva di a^x. So che
$(a^x)' = (\ln a)\, a^x$

$(ka^x)' = (k\ln a)\, a^x \overset{?}{=} a^x \iff k\ln a = 1$

una primitiva sarà quindi
$$\frac{1}{\ln a}\cdot a^x$$

I) Integrazione per scomposizione

se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe definite su $[a,b]$ e hanno ivi primitiva $F(x)$ e $G(x)$ allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ una primitiva di $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è $\alpha F(x) + \beta G(x)$.

ES.1) una primitiva di $x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ è

e in generale una primitiva del polinomio
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
è

ES.2) una primitiva di $(\mathrm{tg}\, x)^2 = 1 + (\mathrm{tg}\, x)^2 - 1$ è

ES.3) una primitiva di $\dfrac{1}{\mathrm{sen}^2 x \cos^2 x} = \dfrac{\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x}{\mathrm{sen}^2 x \cos^2 x}$

è la somma d'una prim. di $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ e di una di $\dfrac{1}{\mathrm{sen}^2 x}$ ...

N.B. Per indicare l'insieme di TUTTE le primitive di $f(x)$ si usa scrivere $\int f(x)\,dx$ e questo [illegible] prende il nome di integrale indefinito di $f(x)$
Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$
$\int f(x)\,dx = \{$ [illegible] $, F'(x) = f(x)\}$
[illegible]

Esercizi. Calcolare: (VEDI pag 7)

$\int \dfrac{x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx$, $\int \dfrac{3x^2 + 3x}{x^2 - 1}\,dx$, $\int \dfrac{dx}{x^2 - 1}$, $\int \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}\,dx$,

$\int \dfrac{\cos 2x}{\mathrm{sen}\,x + \cos x}\,dx$

occhio al dominio

$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$

quindi $\alpha F(x) + \beta G(x)$ è una prim. di $\alpha f(x) + \beta g(x)$.

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + c$$

Esempio 1)

$$\int (x^3 - 4x^2 + 3x - 1)\,dx =$$

$$\int x^3\,dx + \int -4x^2\,dx + \int 3x\,dx + \int -1\,dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - 4\int x^2\,dx + 3\int x\,dx - \int dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + c$$

$$\int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)\,dx =$$

$$= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + c$$

Esempio 2)

$$\int (\mathrm{tg}\, x)^2\,dx = \int \{[1 + (\mathrm{tg}\, x)^2] - 1\}\,dx = \mathrm{tg}\, x - x + c$$

Esempio 2 bis)

$$\int \frac{x}{x-1}\,dx = \int \frac{(x-1)+1}{x-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= x + \ln|x-1| + c$$

$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx = \int\left(\frac{x}{x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$\int\left(2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)dx = 2\sqrt{x} + \ln|x| + c$$

$$\int \frac{3x^2+3x}{x^2-1}\,dx = \int \frac{3x(x+1)}{(x-1)(x+1)}\,dx =$$

funz. l'integranda è definita: in $(-\infty,-1)$ o $(-1,1)$ o $(1,+\infty)$

togliendo dall'I.D. della primitiva $x=-1$.

$$= \int \frac{3x}{x-1}\,dx = 3\int \frac{x}{x-1}\,dx =$$

$$= 3\left(x + \ln|x-1|\right) + c;$$

con dominio $(-\infty,-1)$ o $(-1,1)$ o $(1,+\infty)$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} =$$

Devo integrare una funz. razionale FRATTA con denom. di 2° grado e $\Delta>0$
$\Rightarrow$ denominatore che si scompone nel prodotto di 2 polin. di g. 1 : $(x+1)(x-1)$

$$\int\left(\frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c.$$

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx = \int \frac{x^2-1+2}{x-1}\,dx$$

Divido Numeratore per denominatore

$$= \int\left[(x+1) + \frac{2}{x-1}\right]dx = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + c$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx =$$

I.D. $\operatorname{sen} x + \cos x \neq 0$

$$\int (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx = \operatorname{sen} x + \cos x + c$$

negli intervalli ottenuti eliminando: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Come scomporre una razionale fratta con denominatore di 2° grado con $\Delta>0$

Es.: $$\frac{1}{(2x-1)(x+3)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+3}$$

$$\frac{1}{(2x-1)(x+3)} = \frac{Ax+3A+2Bx-B}{(2x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{(A+2B)x + 3A - B}{(2x-1)(x+3)}$$

2 frazioni con ugual denom. sono uguali se lo sono i numeratori:

$$(A+2B)x + (3A-B) = 1$$

cioè i 2 polinomi hanno uguali i coefficienti dei rari monomi:

$$\begin{cases} A+2B=0 \\ 3A-B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-2B \\ -6B-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2/7 \\ B=-1/7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2x-1)(x+3)} = \frac{2/7}{2x-1} - \frac{1/7}{x+3}$$

$$\int \frac{dx}{(2x-1)(x+3)} = \frac{1}{7}\int \frac{2\,dx}{2x-1} - \frac{1}{7}\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= \frac{1}{7}\ln|2x-1| - \frac{1}{7}\ln|x+3| + c =$$

$$= \frac{1}{7}\ln\left|\frac{2x-1}{x+3}\right| + c$$

II. *Integrazione per parti*

Ricordo che $(fg)' = f'g + fg'$

$\Rightarrow fg' = (fg)' - f'g$

usando la scomposizione

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{fattor finito}} \underbrace{g'(x)\,dx}_{\text{fattor differenziale} \ldots = dg} = \int \underbrace{[f(x)g(x)]'}_{f(x)g(x)}dx - \int f'(x)g(x)\,dx$$

: COME SCEGLIERLI ?

ESEMPI

1) $\int \log_e x\, dx = (*)$

2) $\int \cos^2 x\, dx =$

3) $\int x \cos x\, dx =$

4) $\int x e^x dx =$

5) $\int e^x \cos x\, dx =$

$\boxed{2 \text{ VIE.}}$

6) $\int x^\alpha \ln x\, dx = \boxed{1^\circ \text{ caso}: \alpha = -1}$ $(**)$

$\boxed{2^\circ \text{ caso}: \alpha \neq -1}$

$(*)$ $\int \ln x\, dx = \int \underbrace{\ln x}_{F.F.} \cdot \underbrace{(1\,dx)}_{F.D.} =$

$fg' = (fg)' - f'g$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$

$g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x \Rightarrow$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx =$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

$(**)$ $\int x^\alpha \ln x\, dx =$ F.F. $f(x) = \ln x$, F.D. $x^\alpha dx$ $\boxed{\text{I.D. } (0, +\infty)}$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$

$g'(x) = x^\alpha \Rightarrow g(x) = \begin{cases} \alpha \neq -1 : \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \\ \alpha = -1 : \ln x \end{cases}$

$\boxed{\text{Se } \alpha \neq -1}$

$$\int x^\alpha \ln x\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \ln x - \frac{1}{\alpha+1} \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{1}{(\alpha+1)^2} x^{\alpha+1} + c$$

$\boxed{\text{Se } \alpha = -1}$ $\int x^{-1} \ln x\, dx = \ln x \cdot \ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\, dx$

$A = (\ln x)^2 - A \Rightarrow 2A = (\ln x)^2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ è una primitiva

$\int x^{-1} \ln x\, dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$