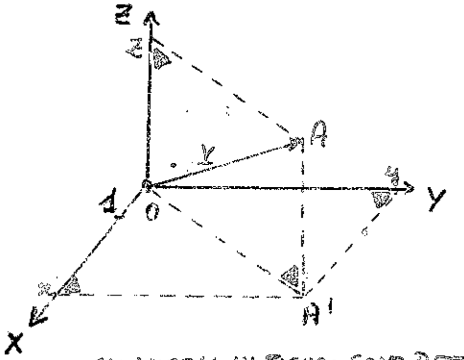
Modulo di $\underline{v} = (x, y)$: $\sqrt{x^2+y^2}$ $\Rightarrow$

Distanza di B da C : $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$

Versori della <u>base</u> <u>canonica</u> : $\underline{i} = (1,0)$ $\underline{j} = (0,1)$

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico nello spazio con orientazione DESTRORSA



GLI ANGOLI IN FIGURA SONO RETTI

$\underline{V} = \overrightarrow{OA} = (x, y, z)$

... componenti di $\underline{V}$

$|\underline{V}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow$ distanza tra 2 punti

$B = (b_1, b_2, b_3)$ e $C = (c_1, c_2, c_3)$

$|\overrightarrow{BC}| = |(c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_3)|$

$= \sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2+(c_3-b_3)^2}$

Se $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$; $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$\underline{v} + \underline{w} = (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3)$

$t\underline{v} = (tv_1, tv_2, tv_3)$

Versori della <u>base</u> <u>canonica</u> $\underline{i} = (1,0,0)$ $\underline{j} = (0,1,0)$ $\underline{k} = (0,0,1)$

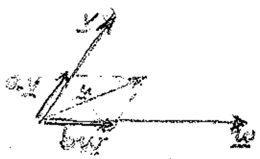
$(x, y, z) =$

<u>Combinazione lineare</u>

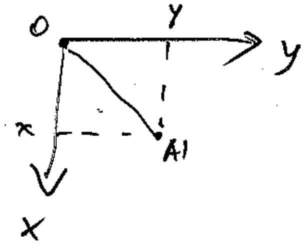
<u>Indipendenza lineare</u>

VEDI PAG 3 e seguenti

$\underline{v}, \underline{w}$ dipendenti



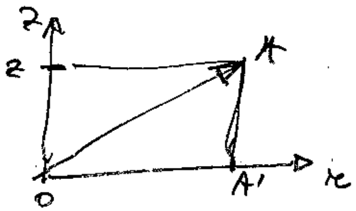
$\underline{u} = a\underline{v} + b\underline{w}$



$|\overrightarrow{OA'}| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA'}|^2+(z)^2} =$

$= \sqrt{x^2+y^2+z^2}$



$B = (b_1, b_2, b_3)$ $C = (c_1, c_2, c_3)$

$\overrightarrow{BC} = (c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_3)$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2+(c_3-b_3)^2}$

distanza tra B e C nello spazio

$\underline{v} + \underline{w}$?

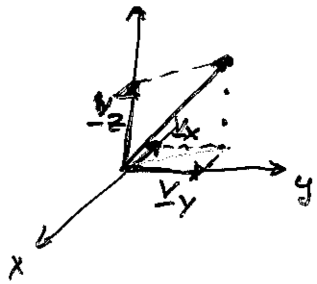
$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$\underline{v} + \underline{w} = (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3)$

$t\underline{v} = (tv_1, tv_2, tv_3)$ $\forall t$ reale

$\underline{v} = (-1, 2, 3) = (-1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 3) =$

$= -1 \cdot (1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1)$



$\boxed{(1,0,0) = \underline{i} \quad (0,1,0) = \underline{j} \quad (0,0,1) = \underline{k}}$

sono i VERSORI che danno la direzione e il verso dei 3 assi nonché l'unità di misura nei 3 assi. VERSORI FONDAMENTALI (Base canonica, Standard)

abbiamo espresso $\underline{v}$ come combinazione lineare di 3 vettori "INDIPENDENTI"

Cos'è una <u>combinazione lineare di vettori</u>?

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^3$

$a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$

> La combinazione dei vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ tramite $a_1, \dots, a_k$ è il vettore
>
> $$a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \dots + a_k \underline{v}_k$$

Esempio in INFINITE DIMENSIONI

$f, g \in \mathcal{C}[a,b]$ (continue) . $hf + kg$ combinazione lineare di funzioni

utile per parlare di indipendenza lineare e di vettori che "generano" ogni vettore di $\mathbb{R}^3$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^3$

dirò che sono <u>linearmente dipendenti</u> se almeno uno di essi si può scrivere come comb. lineare degli altri. Ad es.

$$\underline{v}_1 = a_2 \underline{v}_2 + \dots + a_k \underline{v}_k \qquad a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$$

ES1)

$\underline{v}_1 = (1,0,0) \quad \underline{v}_2 = (2,0,0) \quad \underline{v}_3 = (0,1,0)$

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{2} \underline{v}_2 + 0 \, \underline{v}_3$$

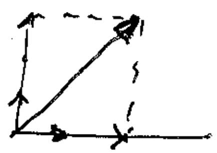
$\Rightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. dipendenti

ES2)

$\underline{v}_1 = (1,0,0) \quad \underline{v}_2 = (0,1,0) \quad \underline{v}_3 = (2,3,0)$

$$\underline{v}_3 = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) = 2\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2$$

$\Rightarrow$ sono dipendenti



vettori complanari

ES3)

$\underline{v}_1 = (1,0,1) \quad \underline{v}_2 = (0,1,1) \quad \underline{v}_3 (1,1,0)$

Sono dipendenti? Esistono $a, b \in \mathbb{R}$

$$\underline{v}_1 = a(\underline{v}_2) + b(\underline{v}_3) \ ?$$

$\underline{v}_1 = (0,1,0) \quad \underline{v}_2 = (1,0,0) \quad \underline{v}_3 = (2,0,0)$ 5

$$(0,1,0) = a(1,0,0) + b(2,0,0)$$
$$= (a,0,0) + (2b,0,0) =$$
$$= (a+2b, 0, 0) \implies \begin{cases} a+2b = 0 \\ 1 = 0 \ ?? \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Non posso scegliere a caso quale vettore potrebbe essere scritto come comb. lineare degli altri

---

Sia:

$\underline{v}_1 = a\,\underline{v}_2 + b\,\underline{v}_3$. Questo succede

$$\iff \quad \underline{v}_1 - a\underline{v}_2 - b\underline{v}_3 = \underline{0} = (0,0,0)$$

$$c\,\underline{v}_1 - a\underline{v}_2 - b\underline{v}_3 = \underline{0}$$

Definizione equivalente:

dico che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono dipendenti se esiste una combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ con coeff. $a_1, \dots, a_k$ non tutti uguali a zero tali che

$$a_1\underline{v}_1 + \dots + a_k\underline{v}_k = \underline{0}$$

Dirò che $\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k$ sono linearmente INDIPENDENTI se la sola comb.

$$a_1\underline{v}_1 + \dots \, a_k\underline{v}_k$$

che dà $\underline{0}$ è quella con $a_1 = \dots = a_k = 0$.

TORNO all'es.3.

$\underline{v}_1 = (1,0,1) \quad \underline{v}_2 = (0,1,1) \quad \underline{v}_3 = (1,1,0)$ 6

$$a_1(1,0,1) + a_2(0,1,1) + a_3(1,1,0) = (0,0,0)$$
$$(a_1,0,a_1) + (0,a_2,a_2) + (a_3,a_3,0) = (0,0,0)$$
$$(a_1+0+a_3,\ 0+a_2+a_3,\ a_1+a_2+0) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$$ sistema lineare in a_1, a_2, a_3

$$\begin{cases} a_3 = -a_1 \\ -a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_3 = -a_1 \\ -a_1 + a_2 = 0 \\ 2a_2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a_3 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \implies$$ i 3 vettori sono indipendenti poiché l'unica terna ordinata (a_1, a_2, a_3)

tale che

$$a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3 = \underline{0}$$

è la terna nulla.

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ sono indipendenti?

$$a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k} = (0,0,0) \qquad \text{SI}$$
$$\| \\ (a_1, a_2, a_3)$$

$\{\underline{0}\}$ è indipendente? NO!!

e ogni insieme di vettori contenente $\underline{0}$ (!
è un insieme dipendente.

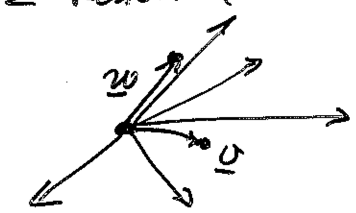
In generale se ho $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ tali che ogni altro vettore $\underline{v}$ di $\mathbb{R}^3$ si può scrivere come loro combinazione lineare
($\exists\, a_1, \dots, a_k$ t.c. $\underline{v} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \dots + a_k\underline{v}_k$)
dirò che $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ è un "sistema di generatori" di $\mathbb{R}^3$

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ sono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$

$\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, \underline{0}\}$ è ancora un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$? Sì

Ampliando un sistema di generatori con altri vettori si ha ancora un sist. di gen.

In $\mathbb{R}^3$ 2 vettori (o meno) non bastano



piano generato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$ non contiene i vettori ad esso ortogonali

3 vettori bastano? Se sono complanari NO

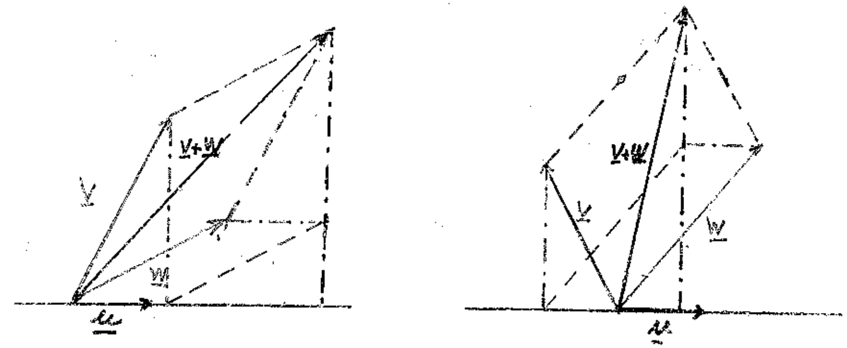
Quindi servirà avere generatori indipendenti
BASE

Prodotto scalare di due vettori $\underline{v}, \underline{w}$.

$\boxed{\circ : V \times V \to \mathbb{R}}$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cos\alpha$ ove $\alpha = \widehat{\underline{v}\,\underline{w}}$, $\alpha \in [0, \pi]$.

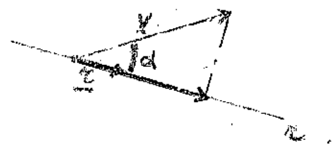
- commutativo
- distributivo: $\underline{u} \circ (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \circ \underline{v} + \underline{u} \circ \underline{w}$ $\quad \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$



$\cancel{|\underline{u}|}\, |\underline{v} + \underline{w}| \cos(\widehat{\underline{u}\,(\underline{v}+\underline{w})}) \overset{\text{TESI}}{=} \cancel{|\underline{u}|} \cdot |\underline{v}| \cos(\widehat{\underline{u}\,\underline{v}}) + \cancel{|\underline{u}|} \cdot |\underline{w}| \cos(\widehat{\underline{u}\,\underline{w}})$

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \underline{v}, \underline{w}$: $(t\underline{v}) \circ \underline{w} = t(\underline{v} \circ \underline{w})$
- $\underline{v} \circ \underline{v} = |\underline{v}| \cdot |\underline{v}| \cos 0 = |\underline{v}|^2$
- $\underline{v} \circ \underline{w} = 0$ e $\underline{v} \neq \underline{0}, \underline{w} \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{v} \perp \underline{w}$

Proiezione ORTOGONALE di un vettore $\underline{v}$ su una retta r (COMPONENTE VETTORIALE di $\underline{v}$)

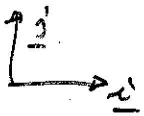


$$\left[\underline{v} \circ \left(\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}\right)\right] \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$$

$\underline{V} = (v_1, v_2) = v_1\underline{i} + v_2\underline{j}$ $\quad \underline{W} = (w_1, w_2) = w_1\underline{i} + w_2\underline{j}$ (9

$$\underline{V} \cdot \underline{W} = (v_1\underline{i} + v_2\underline{j}) \cdot (w_1\underline{i} + w_2\underline{j}) =$$
$$= (v_1\underline{i}) \cdot (w_1\underline{i}) + (v_1\underline{i}) \cdot (w_2\underline{j}) +$$
$$+ (v_2\underline{j}) \cdot (w_1\underline{i}) + (v_2\underline{j}) \cdot (w_2\underline{j}) =$$
$$= (v_1 w_1)(\underline{i} \cdot \underline{i}) + (v_1 w_2)(\underline{i} \cdot \underline{j}) +$$
$$+ (v_2 w_1)(\underline{j} \cdot \underline{i}) + (v_2 w_2)(\underline{j} \cdot \underline{j}) =$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{i} \cdot \underline{i} &= |\underline{i}|^2 = 1 \\ \underline{j} \cdot \underline{j} &= |\underline{j}|^2 = 1 \\ \underline{i} \cdot \underline{j} &= 0 = \underline{j} \cdot \underline{i} \end{aligned}}$$



$$= v_1 w_1 + v_2 w_2$$

In $\mathbb{R}^3$

$\underline{V} = (v_1, v_2, v_3) \qquad \underline{W} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\underline{V} \cdot \underline{W} = v_1 \cdot w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

Qual è l'angolo tra $\underline{V}$ e $\underline{W}$?

$$|\underline{V}| \cdot |\underline{W}| \cos\alpha = \underline{V} \cdot \underline{W} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{|\underline{V}|\,|\underline{W}|}$$

In termini di componenti:

Se $\underline{V} = (v_1, v_2)$ e $\underline{W} = (w_1, w_2)$

$$\underline{V} \cdot \underline{W} = (v_1\underline{i} + v_2\underline{j}) \cdot (w_1\underline{i} + w_2\underline{j}) =$$

se $\underline{V} = (v_1, v_2, v_3)$; $\underline{W} = (w_1, w_2, w_3)$: $\underline{V} \cdot \underline{W} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$

ES1 Trovare l'angolo tra i due vettori $\underline{v} = (1,2,3)$ e $\underline{w} = (3,-1,2)$:

$$1 \cdot 3 + 2(-1) + 3 \cdot 2 = \underline{V} \cdot \underline{W} = |\underline{V}| \cdot |\underline{W}| \cos\alpha = \sqrt{1+4+9}\,\sqrt{9+1+4}\,\cos\alpha$$

$\Rightarrow \cos\alpha =$ VEDI pag 11

In generale:

ES2 Trovare un vettore ortogonale a $\underline{v} = (-1, 2, 1)$ e a $\underline{w} = (3, 1, 4)$ di modulo 1.

$\underline{u} = (x, y, z)$

$\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow$

$\underline{u} \perp \underline{w} \Leftrightarrow$

$|\underline{u}| = ..$

ES3 I vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ dell'esercizio precedente sono indipendenti?

$\underline{v} = (1, 2, 3) \qquad \underline{w} = (3, -1, 2)$

Angolo compreso?

$\underline{v} \cdot \underline{w} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 7$

$|\underline{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$|\underline{w}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14} \qquad \alpha = \widehat{\underline{v}\underline{w}}$

$$\cos\alpha = \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{|\underline{v}|\,|\underline{w}|} = \frac{7}{\sqrt{14}\,\sqrt{14}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$\alpha = \pi/3$

Sul prodotto vettoriale

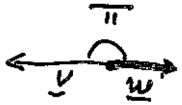
$\underline{v} \wedge \underline{w} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = 0$ o $\underline{w} = 0$ o $\sin\alpha = 0$

cioè $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$

$\Downarrow$

$\underline{v}$ e $\underline{w}$ hanno = direzione e quindi sono PROPORZIONALI

Ad es.:

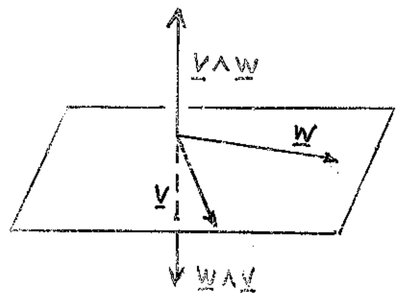


: $\underline{w} = -a^2 \underline{v}$

: $\underline{w} = a^2 \underline{v}$

Prodotto vettoriale di $\underline{v}$ e $\underline{w}$ nello spazio di dim. 3

- $|\underline{v} \wedge \underline{w}| = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \sin\alpha$
- $\underline{v} \wedge \underline{w}$ ortogonale tanto a $\underline{v}$ che a $\underline{w}$
- $\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \wedge \underline{w}$ è una terna DESTRORSA



- anticommutativo $\underline{w} \wedge \underline{v} = -\underline{v} \wedge \underline{w}$
- $(t\underline{v}) \wedge \underline{w} = t(\underline{v} \wedge \underline{w})$
- $\underline{v} \wedge \underline{v} = \underline{0}$
- distributivo $\underline{u} \wedge (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \wedge \underline{v} + \underline{u} \wedge \underline{w}$

Geometricamente $|\underline{v} \wedge \underline{w}| =$

$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}, \quad \underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i}, \quad \underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j} \quad \ldots$

Dunque se $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$\underline{v} \wedge \underline{w} = (v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}) \wedge (w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j} + w_3 \underline{k}) =$ DISTR.

$= (v_2 w_3 - v_3 w_2)\underline{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3)\underline{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\underline{k}$

$\boxed{\text{Es 2 pag 5}}$ $\quad \underline{u} = \dfrac{\underline{v} \wedge \underline{w}}{|\underline{v} \wedge \underline{w}|}$ offre il suo opposto