INDICAZIONI per LUNEDÌ 21/11

Matricole fino alla lettera G (+ VINCI)
aula V0

Le altre matricole + gli studenti di anni successivi
aula 100 (Via Celoria, sotterraneo).

- Se possibile arrivare per le 8.15. Comunque entro le 8:30. Chiamato in ordine alfabetico.
- Lasciate sugli attaccapanni le cose che non servono (+ cellulare e altri strumenti di comunicazione)
  CHI È SORPRESO A COMUNICARE IN QUALUNQUE MODO SALTA L'APPELLO DI FEBBRAIO!
- Andate a sedere (1 posto sì - 1 no; due file sì, una no). Se i fogli del compito sono già nel banco (come indicatore) non iniziate a leggere: aspettare il via per tutti
- Ci vuole il libretto (passeremo a controllarlo durante la prova)
- Ci vogliono i fogli protocollo e 1 penna nera o blu. Non scrivete a matita (al più i grafici) né in rosso. Potete usare il bianchetto e cancellare con vistosi segnacci. NON fate la brutta.
- Potete tenere libri, appunti e calcolatrice scientifica
- Dovete giustificare tutte le risposte.
- Potete fare domande e segnalare quesiti che secondo voi non sono ben posti.

$$\int (3x - (\sin x)^3)\cos x\,dx = \text{SCOMPOSIZIONE}$$

$$= \underbrace{\int 3x\cos x\,dx}_{\text{P.P.}} - \underbrace{\int (\sin x)^3 \cos x\,dx}_{\text{sostituzione}} \overset{(*)}{=}$$

$$= 3x\sin x + 3\cos x - \frac{1}{4}(\sin x)^4 + c.$$

(*)

$$\int 3x\underbrace{\cos x\,dx}_{FD} = 3x\sin x - 3\int 1\cdot\sin x\,dx =$$

$$= 3x\sin x + 3\int(-\sin x)\,dx =$$

$$= 3x\sin x + 3\cos x + c.$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x\,dx \underset{\substack{t=\sin x\\ dt=\cos x\,dx}}{=} \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + c =$$

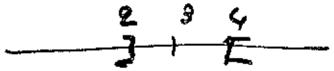
$$= \frac{1}{4}(\sin x)^4 + c$$

$$f(x) = 2 - \sqrt{\log_2|3-x|}$$

$$\text{I.D.}\begin{cases}|3-x|>0\\ \log_2|3-x|\ge 0\end{cases} \qquad \begin{cases}x\neq 3\\ |3-x| \underset{\uparrow}{\ge} 2^0 = 1\end{cases}$$

(2^t è una funz. monotona crescente!)

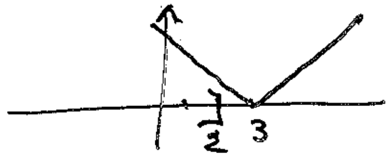
$$\begin{cases} x \neq 3 \\ x \le 2 \ \text{ o } \ x \ge 4 \end{cases} \qquad |3-x| = |x-3|$$



$$\Rightarrow (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$$

$$x \mapsto |x-3| \xmapsto{\log_2} \log_2|x-3| \xmapsto{\sqrt{\ }} \sqrt{\log_2|x-3|}$$
$$\xmapsto{-(\,)} -\sqrt{\log_2|x-3|} \xmapsto{(\,)+2} 2-\sqrt{\log_2|x-3|}$$

Considero $x \in (-\infty, 2]$



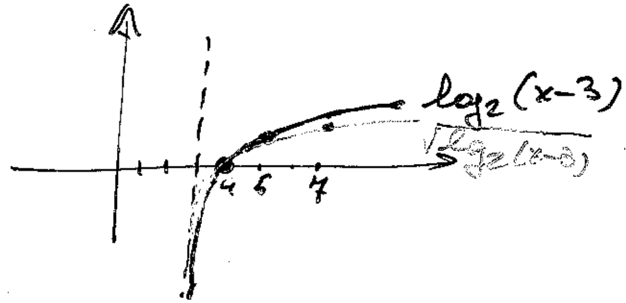
In tale intervallo $|x-3|$ decresce
Applico in sequenza $\log_2$ e $\sqrt{\ }$ che sono funz. crescenti. Quindi in $(-\infty, 2]$ $\sqrt{\log_2|x-3|}$ è decrescente. Quando ne faccio l'opposto (decrescente) e sommo 2 : ho $f(x)$ crescente
Per maniera simile $f(x)$ in $[4, +\infty)$ risulta decrescente

	Motivazione
$\lim_{x\to 2^-} 2-\sqrt{\log_2\|x-3\|} = 2$	funz. cont. da sin. e $f(2)=2$
$\lim_{x\to 4^+} 2-\sqrt{\log_2\|x-3\|} = 2$	" " " destra e $f(4)=2$

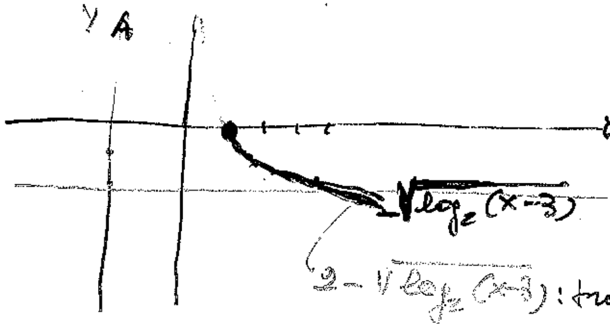
$$\lim_{x\to\pm\infty} 2-\sqrt{\log_2|x-3|} = \boxed{-\infty}$$

$f(x) = 2-\sqrt{\log_2|x-3|}$ è funzione con grafico simmetrico rispetto a $x=3$

$f(x) = 2-\sqrt{\log_2(x-3)}$: è la metà di destra del grafico



(Definita solo per $x \ge 4$)



sx simmetrico risp. asse x di $\sqrt{\log_2(x-3)}$

$2-\sqrt{\log_2(x-3)}$: traslo l'asse x di 2 in basso

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 9x + 9$. Quante radici?

Individuare gli intervalli di ampiezza ed estremi interi in cui cadono le radici.

- Almeno 1 sì poiché funz continua con $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
- Studio del grafico per capire "quanti" sono

$P'(x) = 6x^2 + 6x - 9 \geq 0$ cioè

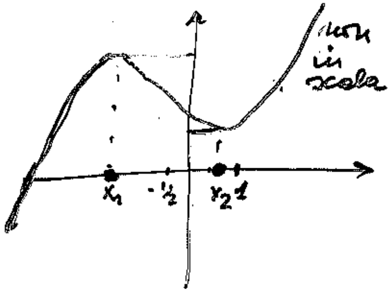
$2x^2 + 2x - 3 \geq 0$

Radici di $P'(x)$: $\quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+6}}{2}$

funzione $P(x)$ è crescente in $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right)$ e in $\left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}, +\infty\right)$; decrescente in

$\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{7}-1}{2}\right) \Rightarrow$ Max in $x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{2}$

min in $x_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$



$P(x_1)$?, $P(x_2)$? $\quad k = 1, 2$

$x_k^2 = \dfrac{3 - 2x_k}{2}$

$x_k^3 = \frac{1}{2}(3 - 2x_k)x_k =$

$= \frac{1}{2}\left(3x_k - \cancel{2} \cdot \frac{3-2x_k}{\cancel{2}}\right) = \frac{1}{2}(6x_k - 3)$

$P(x_k) = 2x_k^3 + 3x_k^2 - 9x_k + 9$

$= 5x_k - 3 + \frac{9}{2} - 3x_k - 9x_k + 9 =$

$= -7x_k + \frac{21}{2}$

$P\left(\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}\right) = -7\,\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2} + \frac{21}{2} =$

$= \dfrac{7 \mp 7\sqrt{7} + 21}{2} = 14 \mp \frac{7}{2}\sqrt{7} > 0$

in $[x_1, +\infty]$ $\quad f(x) \geq f(x_2) > 0$

quindi non ci sono zeri.

$\Rightarrow$ ci può essere 1 solo zero che si trova $(-\infty, x_1]$

$-2 < x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{2} < -\frac{3}{2}$

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3(-2)^2 - 9(-2) + 9 =$

$= -16 + 12 + 18 + 9 > 0$

$P(-4) = 2(-4)^3 + 3(-4)^2 - 9(-4) + 9 =$

$= \underbrace{-8 \cdot 16 + 3 \cdot 16}_{-80} + 9 \cdot 5 < 0$

$P(-3) > 0$

Risposta: Per il T. degli zeri la radice cade in $(-4, -3)$

Si verifichi che $f(x) = \ln x - \frac{1}{x^3}$ è invertibile ove è definita.

$\ln x$ è monotona crescente in $(0,+\infty)$

x^3 " " $\Rightarrow \frac{1}{x^3}$ è monot decr. in $(-\infty, 0)$ e in $(0,+\infty)$

$\Rightarrow -\frac{1}{x^3}$ è crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0,+\infty)$

La somma di 2 crescenti è crescente in $(0,+\infty)$

$\Rightarrow f(x)$ è invertibile.

oppure: stabilisco che è monotona crescente osservando che

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^4} = \frac{x^3+3}{x^4} \quad \text{in } (0,+\infty)$$

$f'(x)$ è >0 $\Rightarrow$ f è crescente

$\Rightarrow$ f invertibile in $(0,+\infty)$.

Calcolare la derivata di $f^{-1}(y)$ in $y_0 = -1$

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{x^3}$$

$y_0 = -1 \overset{?}{=} f(x_0)$: Risolvo l'equazione $(\ln x) - \frac{1}{x^3} = -1$

una soluzione è $x_0 = 1$: è l'unica poiché f è invertibile

Applico il teor di derivaz della funz inversa.

$$\frac{df^{-1}}{dy}(-1) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(1)} = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{3}{1}} = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{(3\ln x - 1)^4}{2x} 3dx = $$

per sostituzione

$t = 3\ln x - 1$

$dt = \frac{3}{x}\,dx$

$$= \int \frac{t^4}{2}\,dt = \frac{t^5}{10} + c =$$

$$= \frac{1}{10}(3\ln x - 1)^5 + c$$

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx =$$

FUNZ RAZ. FRATTA. DEN 2° gr. con $\Delta < 0$ e con NUM dello stesso grado del DEN.

Leggo la funz. come somma di un polinomio e di una fratta con grado del num < grado del denom.

$$\int \frac{(x^2+1)-2}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right) dx$$ per scomposizione

$$= x - 2\arctan x + c.$$

N18

$x \geq 0$

$$\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt[4]{x}=t \quad (t\geq 0) \\ x = t^4 \ ; \ \sqrt{x}=t^2 \\ dx = 4t^3 dt \end{array}}$$

$$= \int \frac{t^2-t}{1+t}\cdot 4t^3 dt =$$

funz. raz. fratta con numeratore di grado > del denom.

$$= 4\int \frac{t^5-t^4}{1+t}\,dt =$$

Divido il numeratore per il denominatore

t^5-t^4 $\qquad$ $t+1$

coeff potenze	5	4	3	2	1	0
	1	-1	0	0	0	0
-1		-1	2	-2	2	-2
	1	-2	2	-2	2	$\boxed{-2}$ Resto

$$\Rightarrow t^5-t^4 = -2 + (t+1)(t^4-2t^3+2t^2-2t+2)$$

$$= 4\int\left[(t^4-2t^3+2t^2-2t+2)-\frac{2}{1+t}\right]dt =$$

$$= 4\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{2}+\frac{2}{3}t^3-t^2+2t-2\ln|1+t|\right)+c =$$

$$= c+4\left(\frac{x\sqrt[4]{x}}{5}-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}-2\ln(1+\sqrt[4]{x})\right)$$

N20 $\displaystyle\int\left(\sqrt{tg^3x}+\frac{1}{\sqrt{tg x}}\right)dx$

$$\boxed{\begin{array}{l} tg x = t \\ (1+tg^2x)dx = dt \end{array}}$$

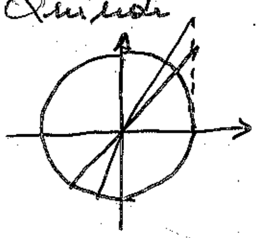
$$= \int \frac{tg^2x+1}{\sqrt{tg x}}\,dx = \int\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\sqrt{t}+c =$$

$$= 2\sqrt{tg x}+c$$

su quali intervalli massimali è definita?

I.D. funzione integranda: $tg x > 0$ è definita in $(0,\frac{\pi}{2})$ e in $(\pi,\frac{3\pi}{2})$ e più in generale negli intervalli della forma $(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ con $k\in\mathbb{Z}$.

Quindi



Quindi gli intervalli massimali su cui è def. la primitiva sono del tipo $(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$

Per quali valori di $a\in\mathbb{R}$ è continua in $x=1$ la funzione

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{sen\,2(x-1)}{x-1} & se\ x<1 \\ 2 & se\ x=1 \\ \dfrac{e^{x-1}-1+(x-1)^a}{\ln x} & se\ x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{sen\,2(x-1)}{x-1} \overset{?}{=} 2 \longrightarrow \boxed{x-1=t} \quad \lim_{t\to 0^-}\frac{sen\,2t}{t}=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{x-1}-1+(x-1)^a}{\ln x} \overset{?}{=} 2 \qquad \boxed{x-1=t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1+t^a}{\ln(1+t)} = \quad \text{per } t\to 0^+ \ \ln(1+t)\sim t$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{e^t-1}{t}+\frac{t^a}{t}\right) = 1 + \lim_{t\to 0^+} t^{a-1}$$

se $a-1>0$ $\quad \lim_{t\to 0^+} t^{a-1}=0$

$a-1=0$ $\quad \lim_{t\to 0^+} t^0 = 1$

$a-1<0$ $\quad \lim_{t\to 0^+} t^{a-1}=+\infty$

$\Rightarrow$ funz. cont. in $x=1$ per $a=1$

per $x \to \pm\infty$ le due funzioni

$$f(x) = \ln(2 - x + \sqrt{2x^2-2}) \quad e$$
$$g(x) = \ln(2 - x + \sqrt{2}\,|x|) \quad \text{sono asintotiche?}$$

I.D. $\begin{cases} 2x^2-2 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2-2} > x-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq -1 \text{ oppure } x \geq 1 \\ \text{certamente vero se } x \leq -1; \text{ nel caso } x \geq 1 \end{cases}$

$2x^2-2 > x^2-4x+4$

$\Rightarrow x^2+4x-6>0 \Rightarrow x > \sqrt{10}-2$

$\Downarrow$

$(-\infty, -1] \cup (\sqrt{10}-2, +\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2-x+\sqrt{2x^2-2})}{\ln(2-x+\sqrt{2}|x|)} \stackrel{?}{=} 1$$

$\ln(2-x+\sqrt{2x^2-2}) = \ln\left(2-x+\sqrt{2}|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) \stackrel{|x|=x}{=}$

$= \ln\left(2+x\left(\sqrt{2}\sqrt{1-1/x^2}-1\right)\right) = \ln\left(x\left(\sqrt{2}\sqrt{1-1/x^2}-1\right)\left(1+\frac{2}{x(\sqrt{2}\sqrt{1-1/x^2}-1)}\right)\right)$

$= \underbrace{\ln x}_{\text{prevale}} + \underbrace{\ln\left[\sqrt{2}\left(\sqrt{1-1/x^2}-1\right)\right]}_{\to \text{costante} \neq 0} + \underbrace{\ln(1 + \text{quantità che va a zero})}_{\to 0}$

al denom. $\ln(2+x(\sqrt{2}-1)) = \ln x(\sqrt{2}-1) +$ pertanto va a zero

per $x \to +\infty$ sono asint.; per $x \to -\infty$ idem $|x| = -x$

---

quali fra i seguenti infinitesimi (per $x \to +\infty$) sono dello stesso ordine di $1/x$?

$1/x^2$, $\quad 1/(x+1)$, $\quad 1/\sqrt{x-2}$, $\quad \dfrac{x+3}{3x^2-2}$ $\swarrow$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x+3}{3x^2-2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{3}$

NO $\quad$ SI $\quad$ NO $\quad$ SI $\quad$ non sono asintotici

$1/x^2$ è di ord. sup a $1/x$

$\frac{1}{x+1}$ è dello stesso ordine di $\frac{1}{x}$ e sono asintotici

$\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ no poiché l'ordine di infinitesimo di $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ è $1/2$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1/\sqrt{x-2}}{1/x} = +\infty$: $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ è infinitesimo di ord. inf. a $\frac{1}{x}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}\ln\left(\frac{n-3}{n}\right)}{n^{1/3}\ln n + 2\sqrt{3n+1}} = \frac{[\infty\cdot 0]}{\infty + \infty}$$ (1)

di ord. sup?

confronto di infiniti

Numeratore $n^{3/2}\ln\left(1-\frac{3}{n}\right)$

$-\frac{3}{n} \to 0$ e quindi NUM $\sim n^{3/2}(-3/n) = -3n^{1/2}$

$(\ln(1+t) \sim t$ se $t \to 0)$

$n^{1/3}\ln n + 2\sqrt{3n+1} \sim n^{1/3}\ln n + 2\sqrt{3}\cdot n^{1/2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}\ln n}{2\sqrt{3}\,n^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{2\sqrt{3}\,n^{1/6}} = 0$$

(per il confronto tra $\ln\square$ e potenza positiva di $\square$)

posso trascurare $n^{1/3}\ln n$. Il limite diventa:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-3n^{1/2}}{2\sqrt{3}\,n^{1/2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$