Commenti sul prodotto scalare: (1

$$|k\underline{v}| = \sqrt{(k\underline{v})\cdot(k\underline{v})} = \sqrt{k^2(\underline{v}\cdot\underline{v})} =$$
$$= |k|\sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}} = |k|\cdot|\underline{v}|$$

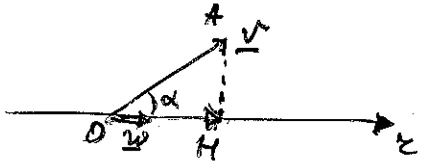
Se ho un qualunque vettore $\underline{v}$ il vettore $\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$ ha modulo

$$\left|\frac{1}{|\underline{v}|}\cdot\underline{v}\right| = \left|\frac{1}{|\underline{v}|}\right|\cdot|\underline{v}| = \frac{1}{|\underline{v}|}\cdot|\underline{v}| = 1$$

Se conosco il vettore direttore $\underline{r}$ di una retta il corrispondente versore è

$$\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = \underline{w}$$

PROIEZIONE ORTOGONALE di un vettore $\underline{v}$ su una retta r (=componente vettoriale di $\underline{v}$) di versore direttore $\underline{w}$



$\vec{OH}$ = è un multiplo di $\underline{w}$. Cerco il fattore di dilatazione:

$|\vec{OH}| = |\vec{OA}||\cos\alpha|$ e $\vec{OH} = (|\vec{OA}|\cos\alpha)\,\underline{w}$

se $|\underline{w}|=1$, $\cos\alpha = \frac{\underline{v}\cdot\underline{w}}{|\underline{v}||\underline{w}|} = \frac{\underline{v}\cdot\underline{w}}{|\underline{v}|}$

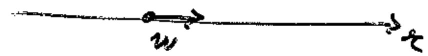
cioè dato che $\vec{OA} = \underline{v}$:

$$\vec{OH} = \left(\cancel{|\underline{v}|}\,\frac{\underline{v}\cdot\underline{w}}{\cancel{|\underline{v}|}}\right)\underline{w} = (\underline{v}\cdot\underline{w})\,\underline{w}$$

(tolti di proposito i segni di prodotto tra 2 scalari o di scalare per vettore. I "•" sono "prodotti scalari")

(2

$\underline{v}\cdot\underline{w}$ (se $\underline{w}$ è un versore) dà la componente lungo la retta di direzione e verso indicato da $\underline{w}$ del vettore $\underline{v}$



ES2

$\underline{v} = (-1,2,1)$ $\quad \underline{w} = (3,1,4)$

trovare un vettore ortogonale a questi due di modulo 1.

$\underline{u} = (x,y,z)$ incognito:

$$\begin{cases} \underline{u}\perp\underline{v} \\ \underline{u}\perp\underline{w}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\underline{u}\cdot\underline{v}=0 \\ \underline{u}\cdot\underline{w}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x+2y+z=0 \\ 3x+y+4z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y+z \\ 6y+3z+y+4z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y+z \\ 7y+7z=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=-2k+k=-k \\ y=-k \\ z=k\end{cases}$$

$k\in\mathbb{R}$: i vettori soluzione del sistema sono quelli della forma $\{(-k,-k,k),\ k\in\mathbb{R}\}$

Il vettore $\underline{u} = (-k,-k,k)$ che modulo ha?

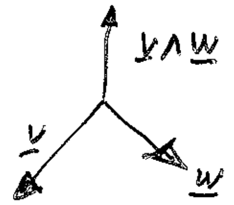
$$|\underline{u}| = \sqrt{k^2+k^2+k^2} = |k|\sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ versore con la direz. di $\underline{u}$: $\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|} = \left(\frac{-k}{|k|\sqrt3}, \frac{-k}{|k|\sqrt3}, \frac{k}{|k|\sqrt3}\right)$

e ne sono 2

$$\left(-\tfrac{1}{\sqrt3}, -\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}\right) \quad \left(\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}, -\tfrac{1}{\sqrt3}\right)$$

VERSIONE ALTERNATIVA di SVOLGIMENTO



$\underline{v} = (-1,2,1) \qquad \underline{w} = (3,1,4)$

Formule per il calcolo di

$(v_1, v_2, v_3) \wedge (w_1, w_2, w_3) =$

$(v_2 w_3 - v_3 w_2)\,\underline{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3)\,\underline{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\,\underline{k}$

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & w_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}\wedge\underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (2\cdot 4 - 1\cdot 1)\,\underline{i} + (3 - (-1)4)\,\underline{j} + (-1\cdot 1 - 3\cdot 2)\,\underline{k} =$$

$$= 7\underline{i} + 7\underline{j} - 7\underline{k} = (7, 7, -7)$$

non è un versore poiché il suo modulo è $7\sqrt3 \Rightarrow$ versore corrispondente

$$\left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}\right)$$

Il suo opposto è ancora soluzione ma forma con $\underline{v}$ e $\underline{w}$ una terna sinistrorsa.

$\underline{v}$, $\underline{w}$ e $\underline{v}\wedge\underline{w}$ sono indipendenti?

Se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono $\neq 0$ e $\underline{v}$ e $\underline{w}$ non sono allineati (cioè se nessuno dei 3 vettori è $= \underline{0}$) la risposta è Sì!

$$a\underline{v} + b\underline{w} + c(\underline{v}\wedge\underline{w}) = \underline{0} \quad ?$$

faccio il prod. scalare per $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{v}\wedge\underline{w}$

$$\begin{cases} a\,\overset{|\underline{v}|^2}{(\underline{v}\cdot\underline{v})} + b\,\underline{w}\cdot\underline{v} + c\,\overbrace{(\underline{v}\wedge\underline{w})\cdot\underline{v}}^{0} = \underline{0} \\ a\,\underline{v}\cdot\underline{w} + b\,\underline{w}\cdot\underline{w} + c\,\underbrace{(\quad)\cdot\underline{w}}_{0} = 0 \\ \underset{\perp}{\boxed{\quad}} \quad \underset{\perp}{\boxed{\quad}} \quad c\,|\underline{v}\wedge\underline{w}|^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c = 0$$

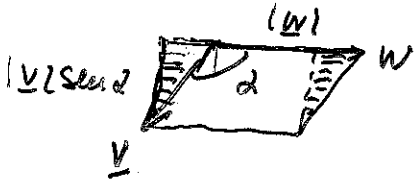
$$\begin{cases} a|\underline{v}|^2 + b\,\underline{v}\cdot\underline{w} = 0 \\ a\,\underline{v}\cdot\underline{w} + b|\underline{w}|^2 = 0 \\ c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -b\,\dfrac{\underline{v}\cdot\underline{w}}{|\underline{v}|^2} \\ -b\,\dfrac{(\underline{v}\cdot\underline{w})^2}{|\underline{v}|^2} + b|\underline{w}|^2 = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b\cdot\dfrac{(\underline{v}\cdot\underline{w})^2 - |\underline{v}|^2|\underline{w}|^2}{|\underline{v}|^2} = 0 \\ - \end{cases}$$

: quanto vale il coefficiente di b? $\neq 0$

$b=0 \Rightarrow a=0$

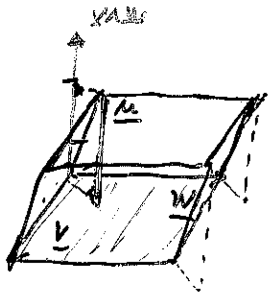
$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{v}\cdot\underline{w} = |\underline{v}|\,|\underline{w}|\cos\alpha \\ &(\underline{v}\cdot\underline{w})^2 - |\underline{v}|^2|\underline{w}|^2 = |\underline{v}|^2|\underline{w}|^2(1-\cos^2\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm 1 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ oppure } \pi \text{ contro ip.} \end{aligned}}$$



$|v|\cdot|w|\,\text{sen}\,\alpha$ = area del parallelogramma individuato da v e w

Prodotto misto.

$$\boxed{u \circ (v \wedge w)} = (v \wedge w) \circ u = - u \circ (w \wedge v) = \dots$$



$$|u \circ (v \wedge w)| = |u|\,\underbrace{|v \wedge w|}\,|\cos\alpha|$$

α angolo tra u e $v \wedge w$

Volume del parallelepipedo di spigoli u, v, w

Quando si annulla il prodotto misto? se si annulla l'area di base o se si annulla l'altezza (cioè se almeno uno dei 3 vettori è 0)
Oppure quando v e w sono allineati
oppure u giace nel piano di v e w:
cioè $\boxed{\text{se e solo se}}$ i 3 vettori sono dipendenti.

prodotto misto per componenti

$$(u_1, u_2, u_3) \circ \big((v_1, v_2, v_3) \wedge (w_1, w_2, w_3)\big) = (u_1, u_2, u_3) \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$= u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

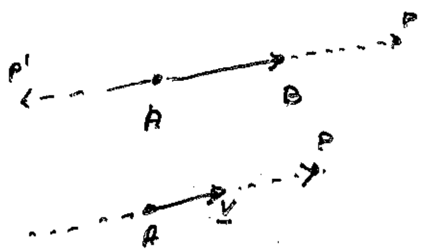
$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Geometria analitica in 3D

punto $P \longleftrightarrow (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}$ (introdotto sist. di rif.)

retta: per ogni punto P della retta per A e B si deve avere

$$\vec{AP} = t\,\vec{AB}$$



$A = (x_0, y_0, z_0)$
$B = (x_1, y_1, z_1)$
$P = (x, y, z)$

$$\left.\begin{aligned} \vec{AB} &= (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0) \\ \vec{AP} &= (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = t(x_1 - x_0) \\ y - y_0 = t(y_1 - y_0) \\ z - z_0 = t(z_1 - z_0) \end{cases}$$

$v = (a, b, c)$: retta per A e di direzione v:

$$\begin{cases} x-x_0 = ta \\ y-y_0 = tb \\ z-z_0 = tc \end{cases}$$ che traduce $\vec{AP} = t\underline{v}$ (7

ES1 $A = (1,-1,1)$ $B = (0,1,-1)$

Le eq. della retta per A e B sono

$\vec{AB} = (0-1,\ 1-(-1),\ -1-1) = (-1,\ 2,\ -2)$

$\vec{AP} = (x-1,\ y+1,\ z-1)$

$$\begin{cases} x-1 = -t \\ y+1 = 2t \\ z-1 = -2t \end{cases} \quad \text{o equivalentemente} \quad \begin{cases} x = 1-t \\ y = -1+2t \\ z = 1-2t \end{cases}$$

quando uso le eq. parametriche descrivo ad uno ad uno i punti della retta.

Se volessi togliere il parametro t:

$$\begin{cases} \boxed{t = 1-x} \\ y = -1+2(1-x) \\ z = 1-2(1-x) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y = 1 \\ -2x+z = -1 \end{cases}$$

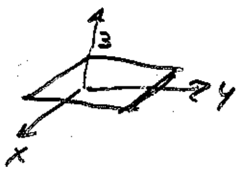
2 equazioni in x e y e z

Eq retta per $A = (2,1,3)$ e parallela al vettore $\underline{v} = (1,-3,0)$

$$\begin{cases} x-2 = 1\cdot t \\ y-1 = -3t \\ z-3 = 0\cdot t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-3t \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y = 7 \\ z = 3 \end{cases} \qquad \boxed{t = x-2}$$

nel piano di quota 3 basta $3x+y=7$ a rappresentare la retta

Nello spazio: NO



Eq. param. retta per $A = (3,1,2)$ ortogonale (8

alle 2 rette di equazioni $\begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 2+2t \end{cases}$

e $\dfrac{x-1}{2} = 3y-1 = \dfrac{4z+1}{3}$

---

se la retta ha direzione $\underline{v} = (a,b,c)$

le equazioni sono del tipo $\begin{cases} x = 3+at \\ y = 1+bt \\ z = 2+ct \end{cases}$

(a,b,c)? PROBLEMA:

Date le eq. di una retta come trovo la sua direzione?

$\boxed{1^a \text{ situazione}}$

$$\begin{cases} x-0 = 1\cdot t \\ y-1 = -1\cdot t \\ z-2 = 2\cdot t \end{cases} \Longrightarrow$$ vettore direzionale di questa retta è $(1,-1,2)$

$\boxed{2^a \text{ situazione}}$

$\dfrac{x-1}{2} = 3y-1 = \dfrac{4z+1}{3}$? o passo al sistema (fatelo x esercizio)

oppure osservo che in ogni membro delle uguaglianze c'è una sola incognita.

$$\frac{x-1}{2} = \underbrace{3y-1}_{\frac{y-1/3}{1/3}} = \underbrace{\frac{4z+1}{3}}_{\frac{z+1/4}{3/4}} = t$$ risolvo:

$$\begin{cases} x-1 = 2t \\ 3y-1 = t \\ 4z+1 = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2t \\ y-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}t \\ z+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}t \end{cases} \Rightarrow \left(2, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

Ora calcolo

$(a,b,c) = (1,-1,2) \wedge \left(2, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$

che risulta ortogonale alle 2 direzioni: $\boxed{\text{Farlo e sostituire}}$