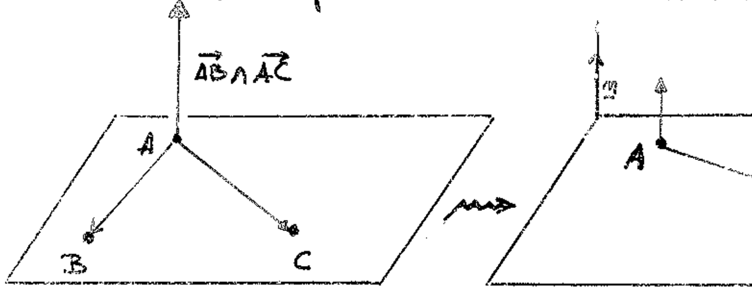
Equazione cartesiana del piano

un piano è noto

- dati 3 suoi punti non allineati
- data 1 sua retta e un suo punto non appartenente alla retta
- dato un suo punto e la direzione $\perp$ al piano.



$\underline{n}\neq 0$

$\vec{AP}$ è ortogonale a $\underline{n}$

$\underline{n}\cdot\vec{AP}=0$

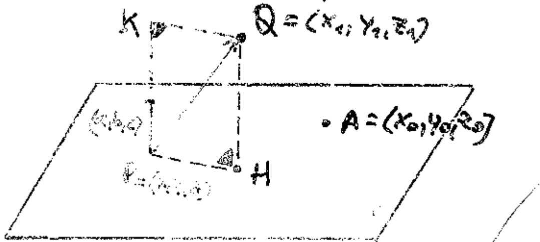
Se $\underline{n}=(a,b,c)$, $A=(x_0,y_0,z_0)$, $P=(x,y,z)$:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

- $(a,b,c)\cdot(x_0,y_0,z_0)=0 \iff$ il piano passa per l'origine
- $a=0 \Rightarrow$ ecc.
- $a=0$ e $b=0 \Rightarrow$ ecc.

Vedi pag 3

Distanza di un punto da un piano (Vedi pag 4)



$$\overline{QH}=\overline{PK}=\frac{|\underline{n}\cdot\vec{PQ}|}{|\underline{n}|\cdot\cancel{|\vec{PQ}|}}\cdot\cancel{|\vec{PQ}|}$$

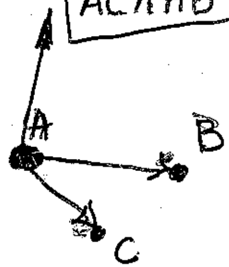
$$=\frac{|a(x_1-x)+b(y_1-y)+c(z_1-z)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

con $(x,y,z)\in$ piano $\Rightarrow$

$$ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0$$

$$=\frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

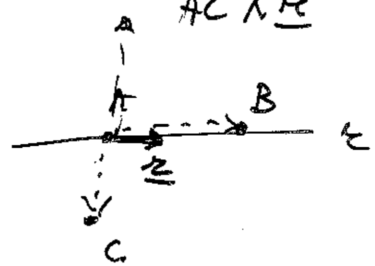
Significato del Termine noto,
Se $|(a,b,c)|=1$: a meno del segno, rappresenta la distanza da $(0,0,0)$



se A,B,C non sono allineati $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ sono indipendenti

Posso dire che il piano per A,B,C è un

$\Rightarrow$ piano che passa per A ed è $\perp$ al vettore $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$



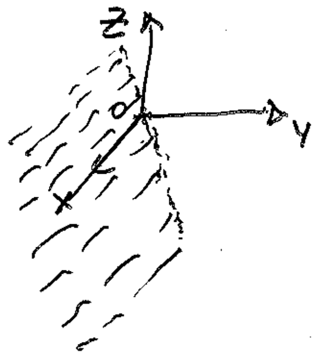
Dare una retta r e un punto $C\notin r$ è come dare 3 punti non allineati (due distinti, A,B, su r e C esterno).

Se il vettore direttore della retta r è $\underline{r}$,

$\vec{AB}=k\,\underline{r} \Rightarrow$ invece di $\vec{AC}\wedge\vec{AB}$ posso prendere $\vec{AC}\wedge\underline{r}$

In tutti i casi la descrizione del piano si riconduce al passaggio per un punto e $\perp$-tà a una retta. (o suo vettore direzionale)

$2y + z = 0$ in yOz $z = -2y$



(diedro solido e non trasparente)

$\Rightarrow$ piano // asse x, in questo caso contenente l'asse x

$a = 0$: piano // x

$b = 0$ " // y

$c = 0$ " // z

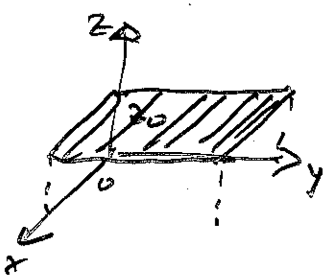
$a = b = 0$. Poiché – per dare una direzione – deve essere:

$(a, b, c) \neq (0,0,0) \Rightarrow c \neq 0$

$c(z - z_0) = 0 \iff z - z_0 = 0$

$\iff z = z_0$

piano // xOy



Idem:

$a = c = 0$ $\quad y = y_0$

$\Rightarrow$ piano // xOz

$b = c = 0$ $\quad x = x_0$

$\Rightarrow$ piano parallelo a yOz.

Distanza di $Q(1, 0, 0)$ dal piano π di equazione $3x - 5y + 2z = 4$

(È l'eq. di un piano?

$$3x - 5y + 2z - 4 = 0$$

$$3x - 5y + 2(z - 2) = 0$$

$$(3, -5, 2) \cdot (x, y, z-2) = 0$$

$\Rightarrow$ punti del piano $\perp$ $\underline{v} = (3, -5, 2)$ e passante per $(0,0,2)$. Sì)

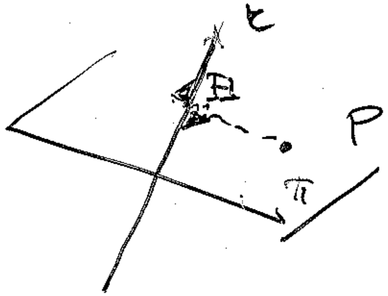
$$\text{dist}(Q, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 - 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + (2)^2}} =$$

$$= \frac{|-1|}{\sqrt{38}} = \frac{1}{\sqrt{38}}$$

ATTENZIONE : deve essere ≥ 0

---

e la dist. di un punto da 1 retta?



Costruisco il piano π per P e ⊥ alla retta r
Trovo H
Calcolo PH.

$$r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y + 2z = 1 \end{cases} \qquad P = (0,0,0)$$

sicuramente non avremo distanza zero poiché $P \notin r$.

Devo trovare un piano $\perp$ r
che vettore $\underline{n} = (a,b,c)$ sarà il vettore che dà la direz. del piano? quello che dà la direzione di r.
Cerco il vettore direzione di r passando in forma parametrica ($\Leftarrow$ risolvere il sistema)

$$\begin{cases} y = 2x \\ 6x + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = \frac{1}{2} - 3t \end{cases} \Rightarrow \text{vettore direzione } (1,2,-3)$$

$\Rightarrow$ il piano π per $P(0,0,0)$ e vett. direz. $(1,2,-3)$ ha equazione: $1 \cdot x + 2y - 3z = 0$
Interseco questo piano con r: cioè impongo che $B = (t, 2t, \frac{1}{2} - 3t)$ appartenga al piano π.

$$t + 2(2t) - 3\left(\frac{1}{2} - 3t\right) = 0 \iff$$

$$14t - \frac{3}{2} = 0 \iff t = \frac{3}{28}$$

Questo è il parametro t per cui il punto $B = (t, 2t, \frac{1}{2} - 3t)$ appartiene al piano π e quindi è la proiezione ortogonale H di P su r

$$H = \left(\frac{3}{28}, \frac{3}{14}, \frac{1}{2} - \frac{9}{28}\right)$$

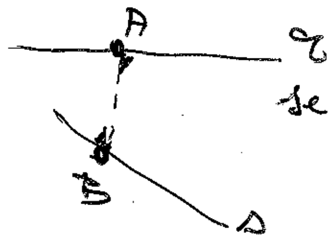
$$\overline{PH} = \sqrt{\left(\frac{3}{28} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{14} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{28} - 0\right)^2} =$$

$$= \mathrm{dist}(P,H) = \sqrt{\frac{3^2}{28^2} + \frac{3^2 \cdot 2^2}{28^2} + \frac{5^2}{28^2}} =$$

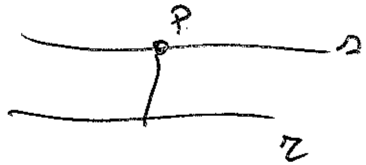
$$= \frac{1}{28}\sqrt{9+36+25} = \frac{\sqrt{70}}{28}$$

---

dist(r, s) ??



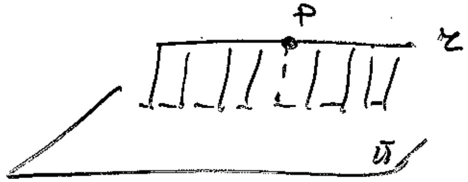
se sghembe c'è 1 solo segmento congiungente $A \in r$ e $B \in s$ e $\perp$ a r e a s $\Rightarrow$ AB dà la distanza



se $r // s$ la dist. è la dist. di $P \in s$ da r se le rette r, Δ sono incidenti o coincidenti hanno distanza nulla.

Piano π – retta r.

se $r \parallel \pi$ e r non sta in π



scelto comunque $P \in r$ si ha:

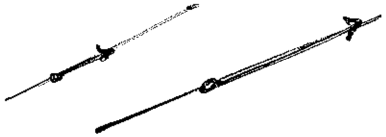
$$\mathrm{dist}(r, \pi) = \mathrm{dist}(P, \pi)$$

anche se $r \subseteq \pi$ posso fare la stessa cosa ma: dist $= 0$

$r \cap \pi \neq \emptyset$ ma $r \not\subset \pi$: dist $= 0$

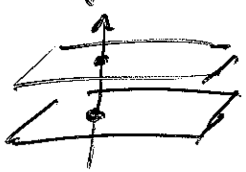
Come stabilire il parallelismo.

retta – retta



sono $\parallel$ se i vettori direzionali sono proporzionali

piano – piano



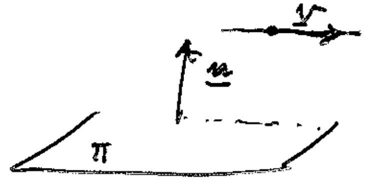
sono $\parallel$ se i vettori direz. dei due piani sono proporzionali.

ad es. $2x - 3y + z = 5$

$-2x + 3y - z = 17$

sono paralleli

retta – piano



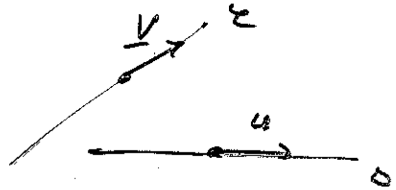
$$\underline{n} \cdot \underline{v} = 0$$

Verifica che $x + 2y = 0$ è parallelo all'asse z.

Infatti $\underline{n} = (1, 2, 0)$; $\underline{v}_z = (0, 0, 1)$

$$\underline{n} \cdot \underline{v}_z = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Angoli : tra rette

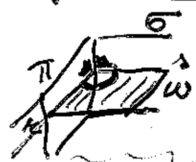


l'angolo tra r e s è l'angolo formato tra $\underline{v}$ e $\underline{u}$

Si parla di angolo anche tra rette sghembe

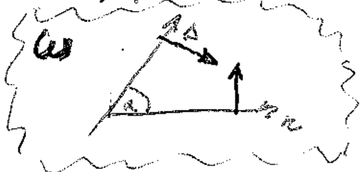
l'angolo che si considera è convesso ($\in [0, \pi]$)

Angolo tra due piani (non paralleli o coincid.)



tagliare l'angolo diedro con un piano $\perp$ alla retta intersezione dei 2 piani

vedi 10agg



Si considera come angolo quello tra i due vettori che danno le direz. di piani

Trovare l'angolo formato dalla retta r (9)

$$\begin{cases} x = 1+6t \\ y = 2-4t \\ z = 2t \end{cases}$$ con l'asse x

$\underline{v}_r = (6,-4,2)$. o anche $(3,-2,1)$

$\underline{v}_x = (1,0,0)$

angolo $\arccos \dfrac{3\cdot1-2\cdot0+1\cdot0}{\sqrt{9+4+1}\,\sqrt{1}} =$

$\arccos \dfrac{3}{\sqrt{14}}$.

<u>NOTA</u>: questa retta è sghemba con x poiché non è // all'asse x (angolo $\neq 0, \pi$) e visto che l'asse x ha equazioni

$$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

un punto comune a retta e l'asse x dovrebbe avere parametro t che soddisfa il sistema

$$\begin{cases} x = 1+6t \\ y = 2-4t=0 & \Rightarrow t=1/2 \\ z = 2t=0 & \Rightarrow t=0 \end{cases}$$ impossibile!!

NB. L'angolo tra due rette // o coincidenti (o tra 2 piani // o coincidenti) è ovviamente nullo e quindi se si sa che sono // non è il caso di mettere in atto questa procedura!