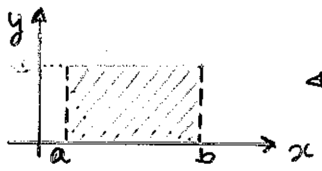
Integrale Definito (versione Cauchy-Riemann)

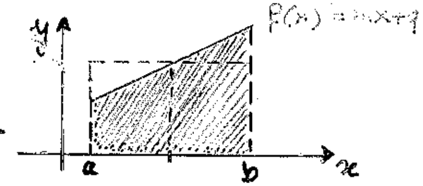
Come calcolare l'area di una figura mistilinea?
(o, corrispondentemente, come calcolare il LAVORO di una FORZA variabile nel tempo nello spostamento lungo una retta ... e analoghi problemi fisici?).

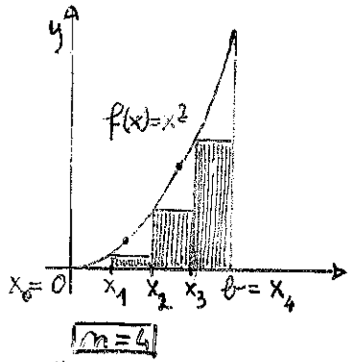
Cominciamo dal facile:



← $\mathcal{A}=(b-a)\cdot|c|$

$\mathcal{A} = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$ →





METODO DI ESAUSTIONE

$\mathcal{A} \approx S_n$ = somma dell'area dei rettangoli di base $\frac{b-0}{n}$ e altezze: $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$

Approssimazione per difetto.

Se la si vuole per eccesso prendere come altezze $f(x_1), \dots, f(x_n)$.

$$S_4 = \frac{b}{4}\left(0^2+\left(\frac{b}{4}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{3b}{4}\right)^2\right) = \frac{b}{4}\cdot\frac{b^2+4b^2+9b^2}{4^2} = \frac{b^3}{4^3}\cdot(1+4+9)$$

$$S_n = \frac{b}{n}\left(0^2+\left(\frac{b}{n}\right)^2+\dots+\frac{(n-1)^2b^2}{n^2}\right) = \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

Si sa: $$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$$

Se suddivido sempre più finemente posso pensare

$$\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{b^3}{3}$$

In generale, definisco un ente nuovo che servirà per calcolare le aree MA NON SEMPRE IN MANIERA AUTOMATICA

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua su $[a,b]$

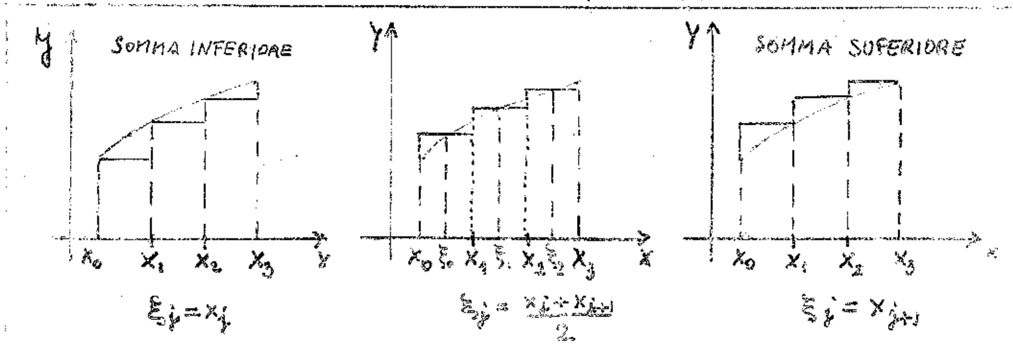
- divido $[a,b]$ in n parti uguali (non fondamentale, ma rende i conti + facili) di ampiezza $h=\frac{b-a}{n}$

  Cioè considero in $[a,b]$ i punti

  $x_0=a,\ x_1=a+h,\ x_2=a+2h,\ \dots,\ x_{n-1}=a+(n-1)h,\ x_n=b$
- in ogni intervallo $[x_0,x_1],\dots,[x_j,x_{j+1}],\dots,[x_{n-1},x_n]$ scelgo un punto $\xi_0,\ \dots,\ \xi_j,\ \dots,\ \xi_{n-1}$ (anche un estremo, se voglio)
- Calcolo

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\underbrace{(x_{j+1}-x_j)}_{h} = h\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) = (b-a)\frac{\sum f(\xi_j)}{n} = S_n$$

SOMMA di CAUCHY-RIEMANN



Tre diverse somme di Cauchy-Riemann

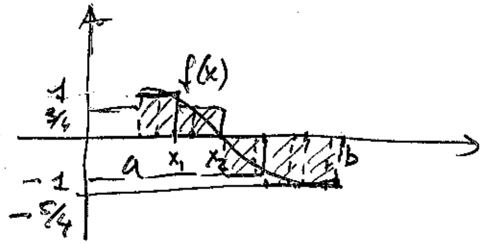
Si dimostra che esiste finito

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

e che tale limite è indipendente dalla scelta dei ξ_j.

Esso è detto integrale definito della funzione $f(x)$ nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e denotato

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



$\int_a^b f(x)\,dx$?

S_5

$x_1 - a = 1$

$1\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + (-\frac{5}{4})\cdot 2 =$

$S_5 = \cancel{1} + \frac{3}{4} - \cancel{1} - \frac{5}{2} = -\frac{3}{4} < 0$

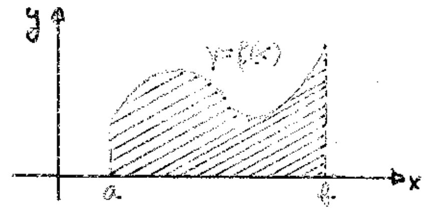
Non è un'area

e neppure il suo valore assoluto
è l'area (approssimata) di
quella regione

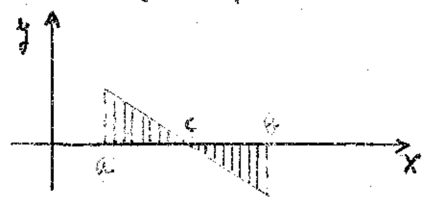
poiché $|S_5| = \frac{3}{4}$ ma $\frac{3}{4}$ è l'area
del 2° rettangolino
mentre gli altri rettangoli essi hanno
area 0.

Interpretazione geometrica

Se $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area del TRAPEZOIDE racchiuso tra $y=f(x)$, l'asse x e le rette $x=a$, $x=b$

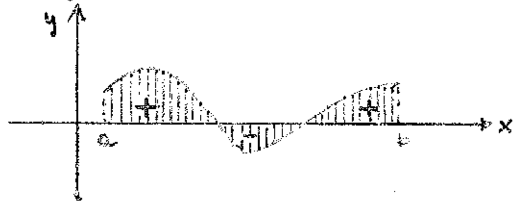


Ma se f(x) cambia segno questo non è più vero



qui $\int_a^b f(x)\,dx = 0$
mentre l'area no

Cioè l'integrale è la somma delle aree prese con il segno + se la regione sta sopra l'asse x e con il segno − se la regione sta sotto l'asse x



Per il calcolo delle aree VEDI DOPO.

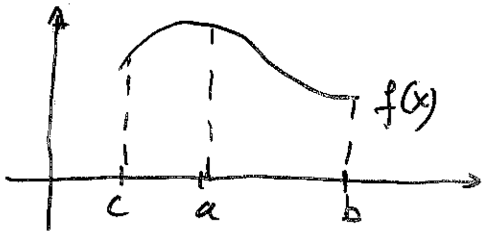
Proprietà

1. Additività degli intervalli di integrazione

$\forall c \in [a,b]$: $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

È possibile generalizzare a un c esterno all'intervallo
(purché f sia continua in $[c,b]$ se $c<a$
in $[a,c]$ se $c>b$)

definendo $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ e $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

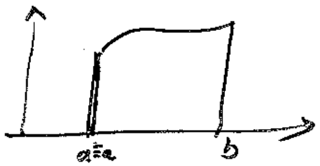


f è cont. in $[c,b]$

additività degli interv. di integraz.
($a \in (c,b)$)

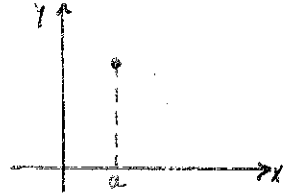
$$\int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$$

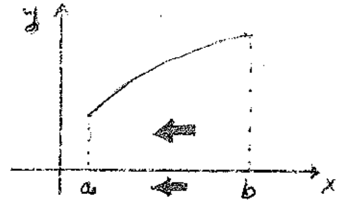
$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\boxed{-\int_c^a f(x)\,dx}}_{\overset{\text{DEF}}{=}\ \int_a^c f(x)\,dx} + \int_c^b f(x)\,dx$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0$$





2. Additività rispetto alle funzioni

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

3. Omogeneità

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

4. Positività

$\forall x\in[a,b]: f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ se $a<b$

5.

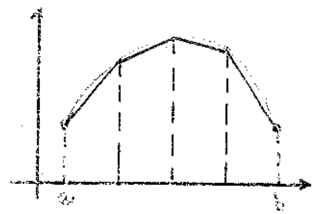
$\forall x \in [a,b]: f(x) \le g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ vedi pag 7

6.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Calcolo di integrali definiti

1. METODI NUMERICI. Per calcolare un'approssimazione dell'integrale piuttosto che usare somme superiori e inferiori è meglio usare il metodo dei TRAPEZI che consiste nel prendere ξ_j in modo che $f(\xi_j)$ sia $\frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2}$



(la funzione f è CONTINUA: vale il teorema dei valori intermedi) cioè nell'approssimare il grafico con segmenti che ne congiungono n+1 punti.

$f \le g$ su $[a,b] \Rightarrow g-f \ge 0$

$$\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx \ge 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

commento alla proprietà 5

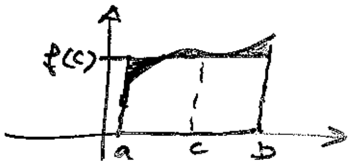
METODO ESATTO PER IL CALCOLO DELL' INTEGRALE DEFINITO

1° TEOREMA della media integrale

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$

allora esiste un punto $c \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$



2° TEOR. FONDAMENTALE del calcolo.

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$.

È definita la funzione $F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$ $\forall\, c \in [a,b]$ e $\forall\, x$ variabile in $[a,b]$

Funzione integrale di f con estremo fissato c.

→ se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$

allora $F(x)$ è derivabile in ogni punto x di (a,b) e $\boxed{F'(x) = f(x)}$

Cioè $F(x)$ risulta essere una primitiva di $f(x)$ in $[a,b]$.

Conseguenze:

$\boxed{\text{Calcolo dell'integrale } \int_a^b f(x)\,dx}$

Sia $G(x)$ un'altra primitiva di $f(x)$ in $[a,b]$:

$$(*) \quad \boxed{G(x) - F(x) = K \text{ costante reale}} \quad \forall x \in [a,b]$$

Cerco come è fatta $F(x)$.

So quanto vale $F(x)$ in qualche punto di $[a,b]$?

$$F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$$

se $x=c$: $F(c)=0$. Applico in $(*)$

$$G(c) - F(c) = k \Rightarrow G(c)=k$$

$$\Rightarrow \quad F(x)= G(x) - G(c) \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{\int_c^x f(t)\,dt = G(x) - G(c)}$$

Formula per calcolare la funzione integrale

Se fisso $c=a$

$$\int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a)$$

e se prendo $x=b$

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)}$$

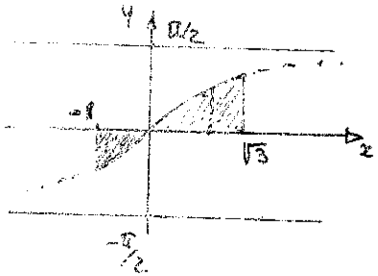
Formula per calcolare l'INTEGR. definito

Dunque per calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$

- cerco una primitiva $G(x)$ di $f(x)$
- calcolo $G(b)$ e $G(a)$
- sottraggo: $G(b)-G(a)$

ES. Calcolare $\int_0^1 \frac{e^x+x}{4e^x+2x^2-1}\,dx$

ES. Calcolare $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx$



ES. Calcolare l'area della regione di piano compresa tra il grafico di arctg x e l'asse x nell'intervallo $[-1,\sqrt{3}]$

Vedi pag 11

$$\int_0^1 \frac{e^x+x}{4e^x+2x^2-1}\,dx =$$

Devo trovare una primitiva:

$$\int \frac{e^x+x}{4e^x+2x^2-1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4e^x+4x}{4e^x+2x^2-1}\,dx = \boxed{\int \frac{f'}{f}}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|4e^x+2x^2-1| + k.$$

$$= \left[\frac{1}{4}\ln|4e^x+2x^2-1|\right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{4}\left(\ln|4e+2-1| - \ln|4+0-1|\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(\ln(4e+1) - \ln 3\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{4e+1}{3}.$$

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx =$$

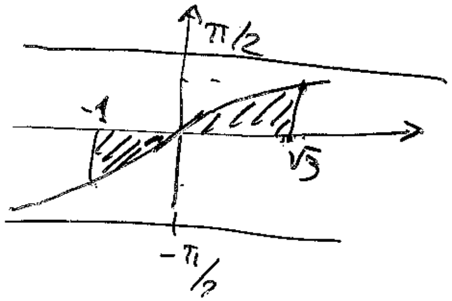
$$\boxed{\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c}$$

$$= \left[x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{-1}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\ln 4 - \left(-1\cdot\arctan(-1) - \frac{1}{2}\ln 2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2 - \left(\frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2})\right) = \pi\,\frac{4\sqrt{3}-3}{12} - \ln\sqrt{2}$$

Trovare l'area della regione di piano compresa tra il grafico di arctan x l'asse x e le rette di equazione
$x = -1$, $x = \sqrt{3}$



Area =
$$-\int_{-1}^{0} \arctan x\,dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} \arctan x\,dx$$

una primitiva di arctan x è
$$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

e quindi

$$\text{Area} = \left[x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^{-1} + \left[x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

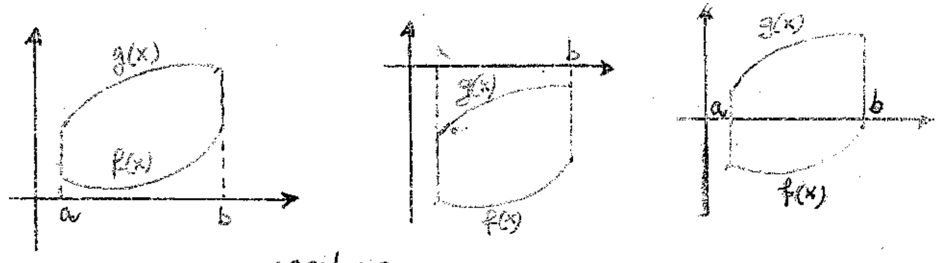
$$= \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\ln 4 +}$$

$$\cancel{-2\left(0 - \frac{1}{2}\ln 1\right) = 0}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{1}{2}\ln 8$$

In generale per calcolare l'area della regione di piano compresa tra i grafici di 2 funzioni $f(x)$ e $g(x)$ con
$f(x) \le g(x)$ in $[a,b]$
e le rette $x=a$, $x=b$, CALCOLARE

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$



eccetera ....

Se i 2 grafici si intersecano corrispondentemente a $x = c$ e
$g(x) \ge f(x)$ per $x \in [a,c]$
$g(x) \le f(x)$ per $x \in [c,b]$

Calcolare
$$\int_a^c (g(x) - f(x))\,dx + \int_c^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Altri ESEMPI (AREA di REGIONI SIMMETRICHE)

1. Calcolare l'area del trapezoide delimitato dall'asse x e dalla funzione $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ nell'intervallo $[-1,1]$.

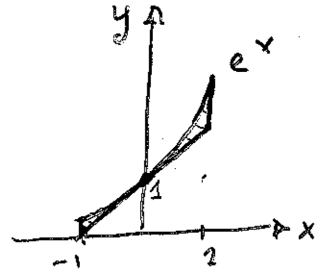
2. Calcolare l'area della regione di piano compresa tra $y=x^3$ e $y=x^5$ nell'intervallo $[-1,1]$.
COSA CAMBIA se scelgo l'INTERVALLO $[-1,2]$?

$\boxed{\text{Vedi pag 13-14}}$

ES0

Area della regione di piano compresa tra $g(x) = e^x$ $f(x) = x+1$, e le rette

$x = -1$ e $x = +1$



il grafico di $f(x) = x+1$ interseca quello di $g(x)$ in qualche altro punto? NO. Perché?

la funzione e^x è convessa $\Rightarrow$ la tangente in ogni suo punto giace tutta sotto il grafico (fuori dal punto di tangenza)

$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x \geq x+1$ poiché $y = x+1$ è la retta tang. a $y = e^x$ in $(0,1)$

$$\Rightarrow \text{Area} = \int_{-1}^{1} \left(e^x - (x+1)\right) dx =$$

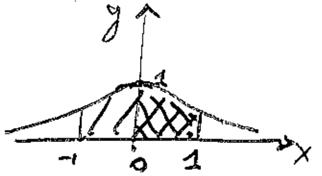
$$= \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x \right]_{-1}^{1} =$$

$$= e - \frac{1}{2} - 1 - \left(e^{-1} - \frac{1}{2} + 1\right) =$$

$$= e - e^{-1} - 2 \quad : \text{ è } > 0 \text{ ? SI}$$

ES1

Trapezoide delimitato dall'asse x, $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ nell'intervallo $[-1, 1]$.



$f(x)$ è pari $\Rightarrow$ la regione è simmetrica rispetto asse y $\Rightarrow$ l'area è 2 volte quella della regione in $[0,1]$

$$\int \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{2}{e^x + \frac{1}{e^x}} dx =$$

$$= \int \frac{2e^x}{e^{2x}+1} dx = \boxed{\begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array}} =$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t^2+1} = 2 \arctan e^x + c.$$

$$\text{Area} = \left[2 \arctan e^x \right]_0^1 = 2 \left(\arctan e - \arctan 1 \right) =$$

$$= 2 \left(\arctan e - \frac{\pi}{4} \right).$$

ES 2

$y = x^3$, $y = x^5$.

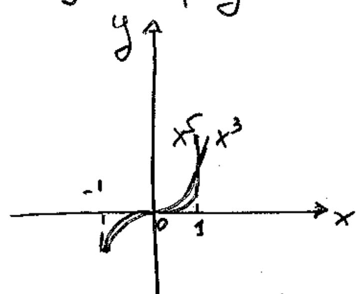


figura simmetrica rispetto all'origine.

Su $[0,1]$ $x^3 \geq x^5$. Inoltre le due funzioni sono dispari.

Quindi $\text{Area} = 2 \int_0^1 (x^3 - x^5) dx =$

$$= 2 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}$$

Se l'intervallo diventa $[-1, 2]$ bisogna aggiungere l'area della regione tra x^5 e x^3 nell'intervallo $[1, 2]$: qui $x^5 > x^3$ e quindi l'area da aggiungere è $\int_1^2 (x^5 - x^3) dx =$

$$= \left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} \right]_1^2 = \frac{16}{3} - 4 - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \dots$$

Area totale: $\frac{4}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{12}$