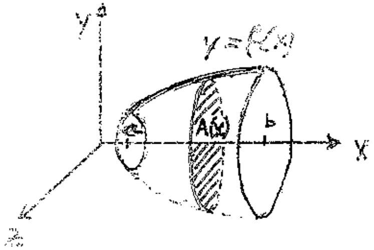
Qualche applicazione degli integrali definiti

1. Calcolo di aree (VEDI)

2. Calcolo del volume di un solido.

Se possibile conoscere il valore dell'area di tutte le sezioni del solido con piani ortogonali a una direzione fissata



il volume è ....

$$\int_a^b A(x)\,dx$$

In particolare se il solido si ottiene per rotazione attorno all'asse x di $y=f(x)$ risulta

$$A(x) = \pi(f(x))^2$$

... il volume di ogni cilindretto: $dV = \pi\,(f(x))^2\,dx$

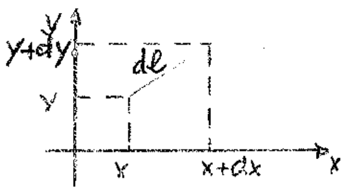
e quindi il volume totale: $V = \int_a^b \pi\,(f(x))^2\,dx$

Es 1. $f(x) = \cos x$, $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow V = \int_0^{\pi/2} \pi(\cos x)^2 dx = \ldots$ COMPLETARE!

Es. 2. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $a=0$, $b=1$ $\Rightarrow V = \int_0^1 \pi(\sqrt{1-x^2})^2 dx =$
(SEMISFERA)
$= \pi \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \pi\left(1-\frac{1}{3}\right)$

3. Calcolo della lunghezza di un arco di grafico

Ipotesi: $f(x)$ e $f'(x)$ continue in $[a,b]$. Posto $y=f(x)$



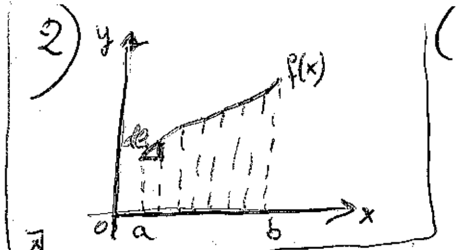
$$dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{(dx)^2\left(1+(f'(x))^2\right)} = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$\Rightarrow$ lunghezza dell'arco tra $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

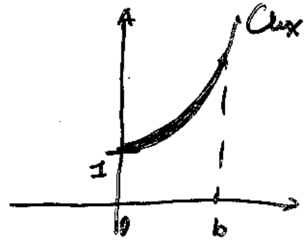
ES. $f(x) = \mathrm{Ch}\,x$ con $a=0$, $b=b$ VEDI A LATO

2)



$$(\mathrm{Ch}(x))' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \mathrm{Sh}\,x$$

$$\int_0^b \sqrt{1+(\mathrm{Sh}\,x)^2}\,dx \quad ?$$



$$1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}$$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+(\mathrm{Sh}\,x)^2} = \sqrt{(\mathrm{Ch}\,x)^2} = \mathrm{Ch}\,x$$

$\Rightarrow$ lunghezza dell'arco è

$$\int_0^b \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^b (e^x+e^{-x})\,dx =$$

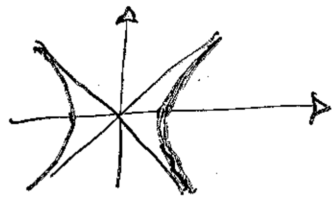
$$= \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_0^b = \frac{1}{2}\left(e^b - e^{-b} \cancel{-1+1}\right)$$

$$= \mathrm{Sh}\,b$$

seno e coseno iperbolico parametrizzano l'iperbole

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \mathrm{Ch}\,t \\ y = \mathrm{Sh}\,t \end{cases} \Rightarrow x>0$$



$$\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2 =$$

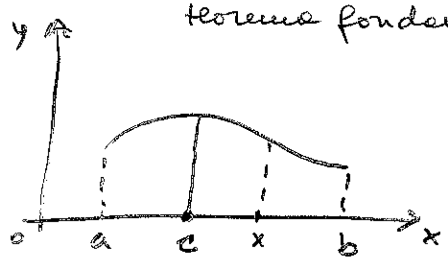
$$\frac{2}{4} - \frac{-2}{4} = 1$$

$$\boxed{(\mathrm{Ch}\,t)^2-(\mathrm{Sh}\,t)^2=1}$$

Per l'altro ramo: $\begin{cases} x = -\mathrm{Ch}\,t \\ y = \mathrm{Sh}\,t \end{cases}$

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA in $[a,b]$. (3

Torniamo al concetto di funzione integrale (e al teorema fondamentale del calcolo).



Sia $c \in [a,b]$ fissato.

se x varia in $[a,b]$

$$\int_c^x f(t)\,dt = F(x)$$

è una funzione definita su $[a,b]$

NB: t variabile di integrazione deve essere $\neq x$

Se prendo $t = x$ quando sostituisco devo sostituire tutto. Ad es. se calcolo

$$F(x) = \int_0^x x\,dx$$

per $x = 1$

$$F(1) = \int_0^1 1\,d1 \qquad \text{non ha senso!}$$

che $F(x)$ sia una funzione si vede dal fatto che: se fisso $x \in (c,b]$

$\int_c^x f(t)\,dt$ è l'ordinario integrale definito

se fisso $x \in [a,c]$, per le convenzioni date nelle propr. dell'integrale definito

$$\int_c^x f(t)\,dt = \begin{cases} -\int_x^c f(t)\,dt & \text{se } x<c \\ 0 & \text{se } x=c \end{cases}$$

(4

cioè $\forall x \in [a,b]$ sono in grado di associare a x l'integrale

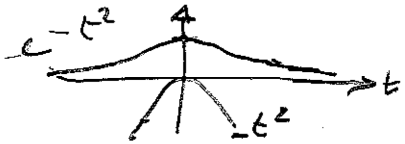
$$\int_c^x f(t)\,dt$$

e c'è un solo integrale associato a x (abbiamo una corrisp. univoca tra $[a,b]$ e $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ funzione)

La funzione trovata si chiama funzione integrale.

Un'altra conseguenza del teor. fond. del calcolo. Può servire a studiare funzioni integrali anche se non riesco ad esprimerle in forma esplicita. Ad es.:

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$



[profilo della Gaussiana. La primitiva non si calcola]

$F(x)$ è una funzione monotona?

$F'(x) = e^{-x^2} > 0$: quindi $F(x)$ è monotona crescente

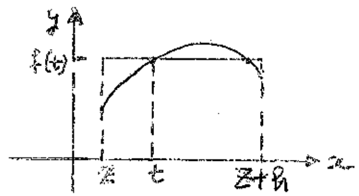
Posso dedurre il segno di $F(x)$. So che $F(0) = \int_0^0 \dots = 0$; è crescente quindi: $\Rightarrow$ $F(x) > 0$ in $(0,+\infty)$, $F(x) < 0$ in $(-\infty, 0)$

TEOR. FONDAMENTALE DEL CALCOLO. Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è CONTINUA su $[a,b]$ allora la "funzione integrale" $F(z)=\int_c^z f(x)\,dx$ (dipendente dall'estremo di integrazione z e definita per ogni $c,z\in[a,b]$ ... per definizione di integrale) è DERIVABILE per ogni $z\in(a,b)$ e $F'(z)=f(z)$.

$\boxed{\text{Dim}}$ Bisogna provare: $\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z)$.

$$F(z)=\int_c^z f(x)\,dx$$
$$F(z+h)=\int_c^{z+h} f(x)\,dx=\int_c^z f(x)\,dx+\int_z^{z+h} f(x)\,dx \Rightarrow F(z+h)-F(z)=\int_z^{z+h} f(x)\,dx$$

SE È VERO CHE per ogni z e h tali che z e $z+h\in[a,b]$
ESISTE un t tra z e $z+h$ tale che
$$\int_z^{z+h} f(x)\,dx=f(t)h$$
si ha
$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{f(t)h}{h}=f(t)$$



e poiché t sta tra z e $z+h$, per $h\to 0$ si ha $t\to z$. Dunque
$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\lim_{t\to z} f(t)=f(z).$$
per la CONTINUITÀ di f

È sostanzialmente il teorema del valor medio del calcolo integrale. L'unico problema è che h può essere >0 o <0.
Nel primo caso O.K.
Nel secondo per il T. del V.M. esiste $t\in(z+h,z)$ tale che
$$\int_{z+h}^{z} f(x)\,dx=f(t)\,(z-(z+h))=-f(t)h \Rightarrow \int_z^{z+h} f(x)\,dx=hf(t)$$

O.K. c.v.d.

GUARDARE QUI

Come già visto la volta scorsa:

Dal teor. fondamentale del calcolo si rideduce la formula per il calcolo esatto dell'integrale, poiché il teorema dice che in $[a,b]$ $F(z)=\int_c^z f(x)\,dx$ è una primitiva di $f(z)$.

Allora se $G(z)$ è una primitiva "comoda" di $f(z)$ $G(z)$ e $F(z)$ differiscono per una costante k:
$$G(z)-F(z)=k \qquad \forall z\in(a,b)$$
In particolare
$$k=G(c)-F(c)=G(c)-0$$
$$\Rightarrow F(z)=G(z)-G(c)$$
In particolare per $c=a$, $z=b$: $\int_a^b f(x)\,dx=G(b)-G(a)$.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCOLO INTEGRALE.
Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è CONTINUA in $[a,b]$, esiste $t\in(a,b)$ tale che $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(t)$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dalla continuità in $[a,b]$: $f(x)$ ha massimo M e minimo m: ASSOLUTI
$$m\le f(x)\le M$$
Proprietà degli integrali:
$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b M\,dx$$
Definizione di integrale:
$S_n=\frac{b-a}{n}\cdot(\underbrace{m+\dots+m}_{n\text{ volte}})$
$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$
cioè
$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le M.$$
Dalla continuità di f in $[a,b]$ (Teorema dei valori intermedi): esiste un $t\in(a,b)$ t.c.
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=f(t).$$
c.v.d.

vedi pag 7

Stiamo dimostrando il teor. del valor medio del calcolo integrale.

$$\int_a^b m\,dx \le \dots$$

Calcolo $\int_a^b m\,dx = m\int_a^b dx = m[x]_a^b = m(b-a)$

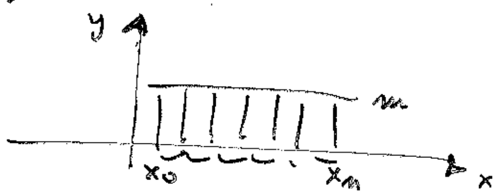
PERCHÉ è sbagliato?

Proviene dalla conseguenza del TEOREMA FONDAMENTALE del Calcolo che si dimostra usando il teor. del valor medio

Ragionamento circolare: non funziona ←

Invece:

$\int_a^b m\,dx$: uso la def. di integrale



$$S_n = \left(m\cdot\frac{b-a}{n}\right)\cdot n = m(b-a)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = m(b-a)$$

Qualche altro esercizio:

1. Il valore dell'integrale definito $\int_1^e (\ln x)\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$ è
   (a) -1 (b) $3/2$ (c) 0 (d) $e+1$ (e) $e-1$

2. L'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \frac{x^3}{3}$, dall'asse y e dalle rette $y=-9$ e $y=9$ è
   (a) $81/4$ (b) 13.5 (c) 0 (d) $=40.5$ (e) 36
   (l'unità di misura è il quadrato di lato 1)

3. Quanto vale $\int_4^9 \frac{(\sqrt{x}-1)^4}{\sqrt{x}}\,dx$?
   (a) $\frac{8}{3}-\frac{5}{3}\sqrt{2}$ (b) $\frac{62}{5}$ (c) $-\frac{203}{2}$ (d) $\frac{242}{5}$
   (e) $\frac{10}{3}\sqrt{2}-\frac{14}{3}$

4. L'area della regione di piano compresa tra l'asse x il grafico di $f(x) = \frac{3(3\ln x-1)^4}{2x}$ e le rette $x=e^{1/3}$ e $x=e$ vale
   (a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{31}{3}$ (c) $\frac{16}{5}$ (d) $\frac{1}{10}$ (e) $\frac{4}{5}$

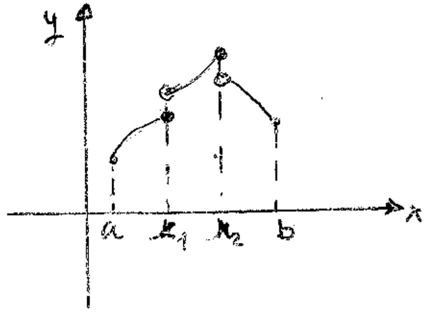
5. Sia $f(x)=5x^2(2x^3-1)^4$. L'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ vale
   (a) $-\frac{7}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{13}{3}$ (e) $\frac{5}{8}$.

INTEGRALI GENERALIZZATI

1. Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ non è continua su tutto $[a,b]$ ma presenta solo un <u>numero finito</u> $k-1$ di discontinuità A SALTO definisco:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{z_i}^{z_{i+1}} f(x)\,dx \qquad \text{ove}$$

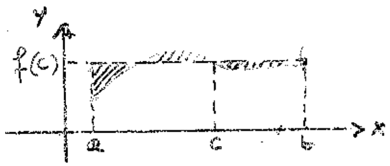
$z_0=a$, $z_k=b$, $z_1,\dots,z_{k-1}$ sono i punti di discontinuità



Il calcolo può essere fatto sfruttando - su ogni intervallo in cui è continua - i metodi visti precedentemente.

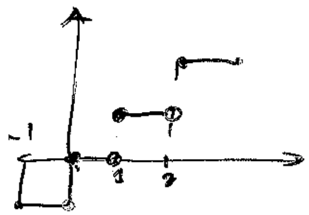
ATTENZIONE. Ci sono due teoremi teoricamente fondamentali che valgono <u>SOLO</u> per funzioni continue:

TEOR. DEL VALOR MEDIO: se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ esiste $c\in(a,b)$ tale che $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(c)$



TEOR. FONDAMENTALE DEL CALCOLO. se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua $F(z)=\int_a^z f(x)\,dx$ è derivabile in (a,b) e $F'(z)=f(z)$.

Es: $f(x)=\lfloor x\rfloor$



$$\int_{-1}^{2}\lfloor x\rfloor\,dx=\int_{-1}^{0}\lfloor x\rfloor\,dx+\int_{0}^{1}\lfloor x\rfloor\,dx+\int_{1}^{2}\lfloor x\rfloor\,dx$$

dopo aver ridefinito la funzione sui singoli intervalli

Cioè considero 3 funzioni

$f_{-1}=-1$ se $x\in[-1,0]$

$f_0=0$ se $x\in[0,1]$

$f_1=1$ se $x\in[1,2]$

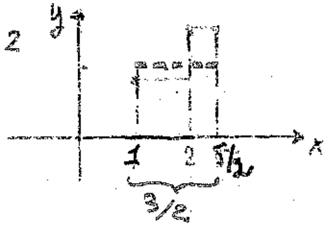
$f_i\equiv\lfloor x\rfloor$ su $[i,i+1)$

$i=-1,0,1$ ma in $x=i+1$ abbiamo una def. diversa

$$\int_{-1}^{2}\lfloor x\rfloor\,dx=-1+0+1=0$$

Ad es: se $f(x) = \lfloor x \rfloor$ e $[a,b] = [1, 5/2]$, posso calcolare

$$\int_1^{5/2} f(x)\,dx = \int_1^2 dx + \int_2^{5/2} 2\,dx = 1 + 1 = 2$$



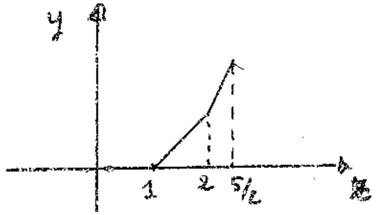
ma non esiste $c \in [1, 5/2]$ t.c.

$$\int_1^{5/2} f(x)\,dx = \frac{3}{2} f(c) \Rightarrow f(c) \overset{?}{=} \frac{2}{3/2} \Rightarrow f(c) = \frac{4}{3}$$

Ancora: esiste la funzione $F(z) = \int_1^z f(x)\,dx = \begin{cases} z-1 & \text{se } z \in [1,2) \\ 2z-3 & \text{se } z \in [2, 5/2] \end{cases}$

$$\int_1^2 dx + \int_2^z 2\,dx = 1 + 2z - 4$$

ma in $x = 2$ non è derivabile



2. $f(x)$ definita e continua in $[a,b)$ ma NON LIMITATA in $[a,b]$ $\left(\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty\right)$

Definisco l'integrale generalizzato (INT. IMPROPRIO DI II SPECIE)

$$\int_a^{b^-} f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{z \to b^-} \int_a^z f(x)\,dx$$

Se il limite esiste finito (o infinito) dico che l'integrale generalizzato (IMPROPRIO di II specie) è CONVERGENTE (o DIVERGENTE) (ecc.: termi nologia dei limiti)

Esempio cruciale: $\int_{0^+}^b \frac{1}{x^k} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^b \frac{1}{x^k}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{cases} \ln|b| - \ln|\varepsilon| \\ \dfrac{b^{1-k} - \varepsilon^{1-k}}{1-k} \end{cases} =$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{INTEGR. DIVERG.} \\ \text{se } k > 1 & +\infty \\ \text{se } k < 1 & \dfrac{b^{1-k}}{1-k} \end{cases}$$

Vedi pag 12

In realtà qui $f(x)$ è def. e continua in $(0,b]$ ...

$$\int_{0^+}^b \frac{1}{x^k}\,dx \qquad (k > 0)$$

$$= \lim_{z \to 0^+} \int_z^b \frac{1}{x^k}\,dx \overset{(*)}{=}$$

- $k = 1$: $\ln b - (-\infty) = +\infty$
- se $k < 1$: $z^{1-k} \to 0 \Rightarrow$ il limite è: $\dfrac{b^{1-k}}{1-k}$
- se $k > 1$: $z^{1-k} \to +\infty \Rightarrow$ il limite è $\dfrac{1}{1-k} \cdot (-\infty) = +\infty$

(*) devo calcolare $\int_z^b \frac{1}{x^k}\,dx \overset{(**)}{=}$

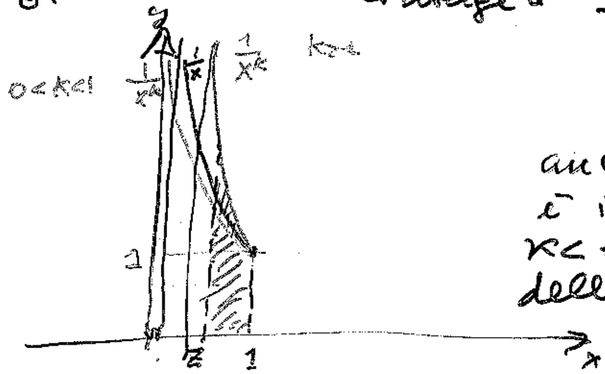
$$= \begin{cases} \text{se } k = 1: & \ln b - \log z \\ \text{se } k \neq 1: & \dfrac{1}{1-k}\left(b^{1-k} - z^{1-k}\right) \end{cases}$$

(**) devo calcolare una primitiva

$$\int \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} \text{se } k = 1: & \ln|x| + c \\ \text{se } k \neq 1 & \dfrac{x^{1-k}}{1-k} + c \end{cases}$$

Concludendo

$$\int_{0^+}^b \frac{1}{x^k}\,dx \begin{cases} \text{diverge se } k \geq 1 \\ \text{converge a } \dfrac{b^{1-k}}{1-k} \text{ se } k < 1 \end{cases}$$

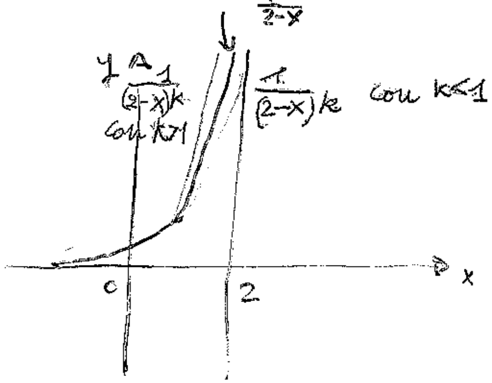


anche se la figura è illimitata, se $k < 1$, il limite delle aree racchiuse tra $x = z$, $x = 1$, $y = 0$ e $1/x^k$ è finito.

$$\int_0^{2-} \frac{1}{(2-x)^k}\, dx$$

se $k \geq 1$ diverge

se $k < 1$ converge



Lo si può leggere geometricamente (i grafici sono i traslati di 2 in direzione e verso di x dei simmetrici dell'esempio cruciale) oppure fare i conti!

se $k=1$

$$\int \frac{1}{2-x}\, dx = -\ln|2-x| + c \quad \text{in } (0,2)$$

$$= -\ln(2-x) + c$$

$$\int_0^z \frac{1}{2-x}\, dx = -\ln(2-z) + \ln 2$$

se $\lim_{z\to 2} -\ln(2-z) + \ln 2 = +\infty$

$\boxed{\text{se } k \neq 1}$

$$-\int \frac{-1}{(2-x)^k} = -\frac{(2-x)^{1-k}}{1-k} + c.$$

$$\int_0^z \frac{1}{(2-x)^k} = \frac{1}{k-1}\left((2-z)^{1-k} - 2^{1-k}\right)$$

$k>1$ esp. negativo $\Longrightarrow +\infty$

$k<1$ esp. positivo : $\lim_{z\to 2^-} \dots = \frac{2^{1-k}}{1-k}$.

Ancora $\int_0^{2-} \frac{1}{(2-x)^k}\, dx =$ $\boxed{\text{A FIANCO!}}$

3. $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ f continua in ogni sottointervallo chiuso e limitato.

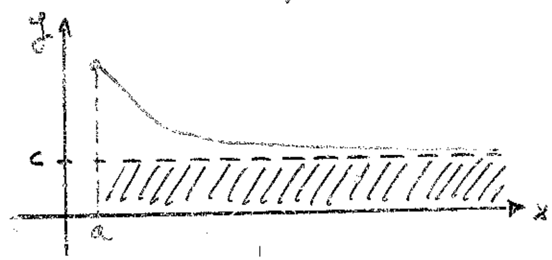
Definisco l'integrale generalizzato (INT. IMPROPRIO DI I SPECIE)

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx := \lim_{\omega \to +\infty} \int_a^{\omega} f(x)\, dx$$

Esempio:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^k}\, dx = \begin{cases} k=1 : \lim_{\omega\to+\infty} \ln|\omega| - \ln|a| = +\infty \\ k<1 : \lim_{\omega\to+\infty} \frac{\omega^{1-k} - a^{1-k}}{1-k} = +\infty \\ k>1 : \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1/\omega^{k-1} - a^{1-k}}{1-k} = \frac{a^{1-k}}{k-1} \end{cases}$$

NOTA BENE: perché questo integrale converga (cioè perché converga $\lim_{\omega\to+\infty} \int_a^{\omega} f(x)\,dx$) bisogna ALMENO che $f(x) \to 0$ allorché $x \to +\infty$



ES. Si trovi il valore del seguente integrale generalizzato

$$\int_{16}^{+\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\, dx$$

ES. Calcolare $\int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-\sqrt{x}}\, dx$