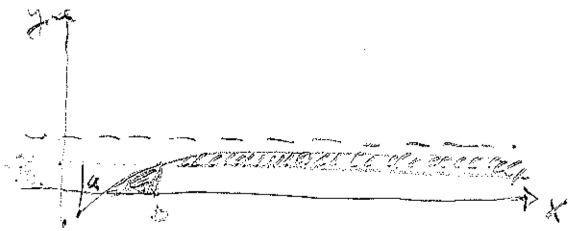


(Cfr. pagina sull'integrale improprio di I specie e nei lucidi della lezione precedente)

$$\int_{16}^{+\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx$$ improprio di I specie?

l'integranda è definita purché $\boxed{x \geq 0}$
e $2\sqrt{x}+1 \neq 0$ (Sempre!)
In $[0,+\infty)$ la funzione è continua.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$$ integrale diverge.

Calcolo esplicito.

1° Calcolo una primitiva

$$\int \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx = \boxed{\begin{array}{l}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2t\,dt\end{array}} \int \frac{2+t}{2t+1}\cdot 2t\,dt =$$

$$= \int\left(t+\frac{3}{2}-\frac{3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2}{2t+1}\right)dt = \frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}\ln|2t+1|+c$$

$$= \frac{x}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{3}{4}\ln(2\sqrt{x}+1)+c$$

$$\frac{2t^2+4t}{2t+1} = t+\frac{3}{2}+\frac{-3/2}{2t+1}$$

$$\begin{array}{r|l} 2t^2+4t & 2t+1 \\ \hline -2t^2-t & t+3/2 \\ 3t & \\ -3t-3/2 & \\ \hline -3/2 & \end{array}$$

2° Calcolo la funzione integrale:

$$\int_{16}^{z} \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx = \left[\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{3}{4}\ln(2\sqrt{x}+1)\right]_{16}^{z} =$$

$$= \frac{z}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{z}-\frac{3}{4}\ln(2\sqrt{z}+1) - 8 - 6 + \frac{3}{4}\ln 9$$

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{z}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{z}-\frac{3}{4}\ln(2\sqrt{z}+1)-14+\frac{3}{4}\ln 9 =$$

poiché $\ln(2\sqrt{z}+1) \sim \ln(2\sqrt{z})$ per $z\to+\infty$

e $\lim_{z\to+\infty} \frac{\ln 2\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 0$

l'addendo $-\frac{3}{4}\ln(2\sqrt{z}+1)$ è trascurabile

$\Rightarrow$ limite $=+\infty$

$$\int_{0^+}^{+\infty} x^{-1/2}e^{-\sqrt{x}}\,dx = ?$$

$x^{-1/2}$ è una potenza $\Rightarrow$ è definita per $x>0$

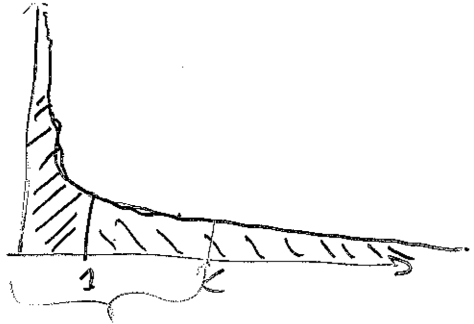
fisso un punto comodo in $(0,+\infty)$: ad es. $x_0=1$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot e^{-\sqrt{x}} = +\infty$ è illimitata
integrale di II specie e anche di I specie poiché l'intervallo è illimitato.

$$\int_{0^+}^{+\infty} x^{-1/2}e^{-\sqrt{x}}\,dx = \int_{0^+}^{1} x^{-1/2}e^{-\sqrt{x}}\,dx + \int_{1}^{+\infty} x^{-1/2}e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

(non importa quale x_0 scelgo)

(2)



$$\int_{0^+}^{c} f(x)\,dx = \int_{0^+}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{c} f(x)\,dx$$

$$\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx - \int_{1}^{c} f(x)\,dx$$

[illegible]

calcolo della primitive:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\,dx = \boxed{\begin{array}{c}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2t\,dt\end{array}} \int \frac{1}{\cancel{t}} e^{-t}\cdot 2\cancel{t}\,dt =$$

$$= -2e^{-t} + c = -2e^{-\sqrt{x}}$$

Calcolo la funz integrale:

$$\int_1^z \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\,dx = -2e^{-\sqrt{z}} + 2e^{-1} = G(z)$$

$$\int_w^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\,dx = +2e^{-\sqrt{w}} - 2e^{-1} = F(w)$$

$$\int_{0^+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{w\to 0^+} F(w) + \lim_{z\to+\infty} G(z) =$$
$$= (2-2e^{-1}) + (0+2e^{-1}) = 2$$

(4)

$$F(z) = \int_z^1 x\,dx \qquad f(x)=x$$

è vero che $F'(z) = z = f(z)$?

$$\int_z^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_z^1 = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{2} = F(z)$$

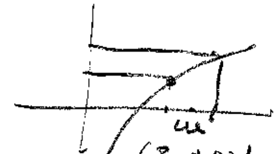
$$F'(z) = -z = -f(z)$$

se $G(z)=\int_1^z g(x)\,dx \Rightarrow G'(z) = g(z)$ (Teor. fond. calcolo)

$$F(x) = -G(x) = \int_z^1 g(x)\,dx \Rightarrow F'(x) = -G'(x) = -g(x)$$

Calcolare

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^k}\,dx$$



$(2,+\infty)$
$\ln x > 0$
$\Rightarrow$ è definita $(\ln x)^k\ \forall k$

improprio di I specie

Calcolo di una primitiva:

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^k}\,dx = \begin{array}{c}\ln x = t\\ \frac{1}{x}dx = dt\end{array} \int \frac{dt}{t^k} = \begin{cases} k=1 & \ln|t|+c \\ k\neq 1 & \frac{t^{1-k}}{1-k}+c\end{cases}$$

$\boxed{\text{con } t=\ln x}$

Calcolo della funz integrale

$$\int_2^z \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \begin{cases} k=1: & \ln|\ln z| - \ln|\ln 2| \\ k\neq 1: & \frac{(\ln z)^{1-k}}{1-k} - \frac{(\ln 2)^{1-k}}{1-k}\end{cases}$$

Calcolo dell'integrale improprio

$k=1$

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{z\to+\infty} \ln|\ln z| - \ln|\ln 2| = +\infty$$

$k<1$

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k} = \frac{1}{1-k}\Big(\underbrace{\lim_{z\to+\infty}(\ln z)^{1-k}}_{+\infty} - (\ln 2)^{1-k}\Big) = +\infty$$

$k>1$

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k} = \frac{1}{1-k}\lim_{z\to+\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{(\ln z)^{k-1}}}_{\downarrow\, 0} - \frac{1}{(\ln 2)^{k-1}}\Big)$$

$$= \frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{(\ln 2)^{k-1}} \quad \text{Converge}$$

Se volessi sapere se $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2\ln x}$ converge o diverge?

Ci sono funzioni che non riesco a integrare facilmente. Se voglio conoscere qualcosa della funzione integrale e dei suoi limiti (= integrali impropri)

Sui limiti posso procedere PER CONFRONTO, per stabilire SE l'integrale improprio converge o diverge (non per stabilire che cosa converge)

Es. Calcolare $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,e^{-x}\,dx$

Es. Quale delle seguenti uguaglianze è falsa?

(a) $\int_1^e x^{-2}dx = 1-e^{-1}$ (b) $\int_{0^+}^1 x^{-1/2}dx = 2$

(c) $\int_{-1}^e x^{-2}dx = -(1+e^{-1})$ (d) $\int_{1/2}^{+\infty} x^{-2}dx = 2$

(e) $\int_{-1}^1 |x|^{-1/2}dx = 4$

Es. Calcolare $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\,dx$

Es. Calcolare $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^k}\,dx \quad (k\neq 1)$

E $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2\ln x}\,dx$ che cosa fa? Converge o diverge?

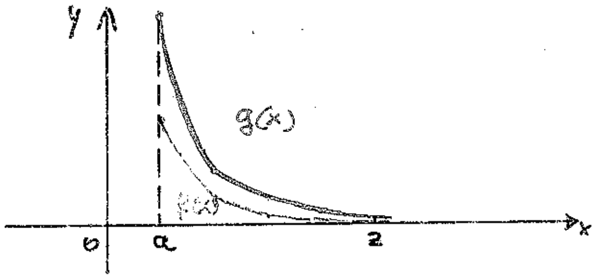
Non è facile calcolare una primitiva e quindi la funzione integrale e il suo limite per $z\to+\infty$.

L'idea è di procedere per CONFRONTO.

Ho una funzione $f(x) \geq 0 \Rightarrow F(z) = \int_a^z f(x)\,dx$ è CRESCENTE

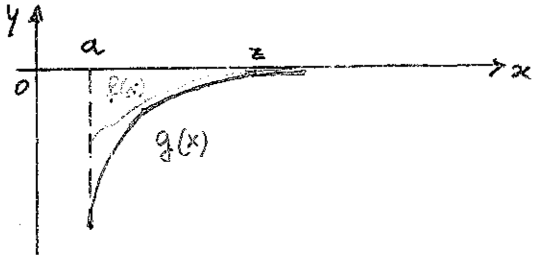
$\Rightarrow \lim_{z \to +\infty} F(z)$ esiste (finito o no)

Se esiste una funzione $g(x) \geq f(x)$ su tutto $(a, +\infty)$ e tale che $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx$ è finito, allora (TEOR. del confronto) anche $\lim_{z \to +\infty} F(z)$ è finito



NOTA: l'area del TRAPEZOIDE di $g(x)$ è maggiore dell'area del TRAPEZOIDE di $f(x)$

Similmente se $f(x) \leq 0$ in $(a, +\infty)$ e $g(x) \leq f(x)$ su $(a, +\infty)$ con $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx$ finito, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge:



A rovescio: se $f(x) \geq 0$ e c'è una funzione $g(x)$ tale che $f(x) \geq g(x) \geq 0$ e $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx = +\infty$ allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$$

(Tradurre nel caso negativo)

È vero che $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge?

Voglio provare che la risposta è Sì

$g(x) = e^{-x}$ è una ragionevole funzione di confronto?

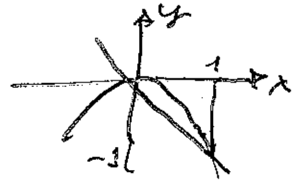
Rispetto a quale criterio?

$\boxed{\text{I° criterio del confronto con le disequazioni}}$

$$e^{-x^2} < e^{-x} \quad ?$$

$$\Updownarrow$$

$$-x^2 < -x$$



per $x > 1$ Sì

(anche per $x < 0$ ma non serve)

$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ = numero

Confronto $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ e $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{z \to +\infty} \left[-e^{-z} + e^{-1}\right] = e^{-1}$$

cioè $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge e visto che in $[1, +\infty)$ $e^{-x^2} < e^{-x}$, anche

$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge

oppure

Se $\overset{\text{continua e}}{f(x)} \geq 0$ in $[a,+\infty)$ e $\overset{\text{continua e}}{g(x)} > 0$ in $[a,+\infty)$ e se

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ finito
- $\lim\limits_{z\to+\infty} \int_a^z g(x)\,dx$ è finito

allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è finito

INVECE se

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
- $\lim\limits_{z\to+\infty} \int_a^z g(x)\,dx = +\infty$

allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

ADDIRITTURA se $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ posso dire

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge se e solo se converge $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

AD ES. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ converge poiché

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{z\to+\infty} \int_0^z e^{-x}dx = \lim_{z\to+\infty} 1-e^{-z} = 1$$

e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x^2}}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x(1-x)} = 0.$

ES. $\int_1^{+\infty} x^s e^{-x}dx$ converge ($s \in \mathbb{R}$). Infatti:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^s e^{-x}}{x^{-k}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{s+k}}{e^x} = 0$ $\forall k$ e in particolare per $k=2$. Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ è converge anche l'integrale assegnato converge.

II criterio (del confronto asintotico generalizzato)

$g(x) = e^{-x} > 0$ su $[0,+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x-x^2} = e^{-\infty} = 0$$

è un numero $\Rightarrow$ posso dire che, dato che $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ converge anche $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ converge

---

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx$$

in $[2,+\infty)$ la $f(x) = \frac{1}{x^2 \ln x}$ è def. cont. e ≥ 0

$g_1(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2 \ln x}}{\frac{1}{x \ln x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ limite finito!

ma ho scelto male $g_1(x)$ perché $\int_2^{+\infty} g_1(x) = +\infty$

Se voglio una funzione di confronto utile mi devo prendere una il cui integr. impr. sia convergente e tale che il limite sia finito

$g_2 = \dfrac{1}{x^2}$: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ è finito; $\dfrac{1/x^2 \ln x}{1/x^2} \to 0$ per $x\to\infty$

$\Rightarrow$ converge anche l'integr. dato

In maniera simile ci si comporta con gli integrali impropri di II specie:

Es. $\int_{0+}^{1} e^{-x} x^s dx$ è un integrale improprio solo se $s<0$

Ora $e^{-x}x^s>0$; $e^{-x}\to 1$ per $x\to 0$ e quindi

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-x}x^s}{x^s} = 1$$

Allora, visto che $\int_{0+}^{1} x^s dx$ converge $\Leftrightarrow -1<s<0$,

anche $\int_{0+}^{1} e^{-x}x^s dx$ converge $\Leftrightarrow -1<s<0$.

Dunque resta definita una funzione:

$$\Gamma(s) = \int_{0+}^{+\infty} e^{-x}x^s dx \qquad \forall s>-1$$

detta funzione di Eulero che è tale che

$$\Gamma(n) = \int_{0+}^{+\infty} e^{-x}x^n dx = n!$$

$$\int_{0+}^{1} e^{-x}x^s dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x}x^s dx$$

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}\, dx$$

per usare il criterio del confronto devo separare le due situazioni

$$\int_{0+}^{+\infty} f(x) = \int_{0+}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx$$

poiché gli asintotici utili da trovare sono diversi per $x\to 0+$ o per $x\to+\infty$

se $x\to 0+$

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{x\cdot 1\cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

sono davvero asintotiche: $\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}}{\frac{1}{\sqrt{2x}}} = 1$

$\Rightarrow$ osservo che $\int_{0+}^{1} \frac{1}{\sqrt{2x}}\, dx = \sqrt{2}\int_{0+}^{1} \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{2}$ converge

quindi per il criterio del confronto asintotico posso dire che anche $\int_{0+}^{1} f(x)\,dx$ converge.

se $x\to+\infty$

$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x^3}}$: sono asintotiche? Sì! $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = 1$

Osservo che

$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx$ converge (esp. $k>1$)

$\Rightarrow \int_{1}^{+\infty} f(x)$ converge.

$\Rightarrow \int^{+} f(x)$ in quanto somma di $\int$ convergenti, converge