Derivate successive

Supponiamo che $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ sia derivabile in ogni punto $x_0\in(a_1,b_1)\subseteq(a,b)$.
Resta definita una funzione

$$f':(a_1,b_1)\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x_0\longmapsto f'(x_0)$$

che si chiama FUNZIONE DERIVATA di f.
Si possono allora cercare i punti x_1 di (a_1,b_1) in cui la funzione f' è derivabile cioè <u>esiste finito</u>

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_1+h)-f'(x_1)}{h}=(f')'(x_1).$$

Per semplicità si scrive f'' invece di $(f')'$ e si chiama $f''(x_1)$ <u>derivata seconda di f in x_1</u>.
Se in ogni punto $x_1\in(a_2,b_2)\subseteq(a_1,b_1)$ la funzione f' è derivabile, resta definita una nuova funzione

$$f'':(a_2,b_2)\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x_1\longmapsto f''(x_1)$$

che si chiama <u>funzione derivata seconda</u> di f.

Proseguendo così, a partire dalla funzione derivata n-esima di f

$$f^{(n)}:(a_n,b_n)\longrightarrow\mathbb{R}$$

si può definire la derivata $(n+1)$-esima in un punto $x_n\in(a_n,b_n)$ come

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(x_n+h)-f^{(n)}(x_n)}{h}=f^{(n+1)}(x_n)$$

(se esiste finito).

ESEMPIO: calcolare le derivate successive di x^6.

Approssimazioni locali

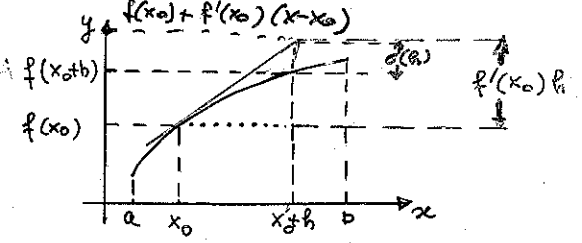
già visto: Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è derivabile in x_0 e $x_0+h\in(a,b)$

$$* \qquad f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+o(h)$$

ove $o(h)$ significa che

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h}=0$$

Geometricamente:



... se $h\to 0$ posso sostituire a $f(x_0+h)$ il valore $f(x_0)+h\cdot f'(x_0)$, ordinata del punto, sulla tangente in $(x_0,f(x_0))$, che ha ascissa x_0

Di solito si indica "l'incremento calcolato lungo la tangente": $hf'(x_0)$ con il simbolo df, <u>differenziale di f in x_0</u>.
Se $f(x)=x$, $f'(x)=1 \Rightarrow dx=h$. Si arriva così alla scrittura

$$df=f'(x_0)dx.$$

Altra cosa già vista:
Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), esiste $c\in(a,b)$ t.c. $f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$

e, se $x_0,\ x_0+h\in[a,b]$, esiste $c\in(a,b)$ t.c. (anzi interno all'intervallo di estremi x_0 e x_0+h)

$$** \qquad f(x_0+h)=f(x_0)+f'(c)\cdot h$$

*,** Sono due formule di approssimazione "locali" cioè valide in un "piccolo" intorno di x_0.

Voglio generalizzare. Perché?

- Calcolo di limiti.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+o(x))-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2}=??$$

(*) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{(1+x)(\ln(1+x))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(x+o(x))-x}{(1+x)(x+o(x))^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+o(x)+x\,o(x)-x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2}=??$$

- Stima di "quel che trascuro"

Come generalizzo? Ho visto che la derivata seconda mi dà indicazioni sulla curvatura del grafico ("quanto il grafico è diverso da una retta?").
Mi chiedo: posso generalizzare ** utilizzando * come passo di partenza?
Cioè esiste un numero reale k tale che

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+k\,h^2$$

Se sì

$$f'(x_0+h)=f'(x_0)+2k\,h.$$

La funzione f' è derivabile su (a,b) e continua su $[a,b]$?
Se sì il teorema di Lagrange dice che $\exists\, c\in(a,b)$ t.c.

$$\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}=f''(c)$$ intermedio tra x_0 e x_0+h

$\Rightarrow$ basta scegliere $k=\frac{1}{2}f''(c)$. Concludendo:

(*) Questo esempio proviene dal calcolo e studio della derivata di $f(x)=\frac{x}{\ln(1+x)}$

1) $\boxed{Hp}$ f derivabile in x_0 (e quindi in particolare definita in x_0 e in un suo intorno. Allora

$\boxed{TS}$ $$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+o(h) \quad (*)$$

2) $\boxed{Hp}$ f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)
$(a,b)\ni x_0,\ x_0+h$

$\boxed{TS}$ esiste c nell'intervallo di estremi x_0, x_0+h tale che

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(c)\,h \quad (**)$$

Posso usare le approssimazioni per calcolare limiti (1) o per dare stime (2).
Se uso la generalizzazione di (2) che dice

$\exists\, c\in(x_0,x_0+h)$ o (x_0+h,x_0) | tale che $f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(c)}{2}h^2$

per calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x}$ ... non funziona

$x_0=0$ $\quad f(x)=e^x \Rightarrow f(0)=1$
$\quad f'(x)=e^x \Rightarrow f'(0)=1$
$\quad f''(x)=e^x \Rightarrow f''(c)=e^c$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{e^c}{2}x^2-1-x}{x^2}=\frac{e^c}{2}\ ???$$

non conosco c.
Vado a migliorare le approssimazioni e soprattutto cerco una approssimazione più adeguata al calcolo di un limite (forma (1) e non forma (2))

TEOREMA di TAYLOR. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e

- esista f' in $[a,b]$, continua in $[a,b]$
- " f'' in (a,b)

Allora se $h>0$ esiste un $c \in (x_0, x_0+h) \subseteq (a,b)$

[" $h<0$ " " $c \in (x_0+h, x_0) \subseteq (a,b)$]

tale che
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \boxed{\tfrac{1}{2} f''(c) h^2}$$

Questa formula dice che nella formula
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \boxed{o(h)}$$
l' $o(h)$ che "trascuro" ha l'ordine di grandezza di h^2.

In generale

TEOR. di TAYLOR (forma di Lagrange). Considero $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

- $f, f', \dots, f^{(n)}$ siano continue in $[a,b]$
- esista $f^{(n+1)}$ in (a,b).

Sia $x_0 \in (a,b)$ e $x_0+h \in (a,b)$. Allora

se $h>0$ esiste un $c \in (x_0, x_0+h)$

[" $h<0$ " " $c \in (x_0+h, x_0)$]

tale che
$$(\blacktriangledown) \quad \boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}.}$$

- Si dimostra di passo in passo come visto sopra.
- Come potrebbe venirmi in mente che ci sono quegli "STRANI COEFFICIENTI"?

Proviamoci con un polinomio!

$f(x) = 1+x+x^2+x^3$	in $x_0=0$	vale 1
$f'(x) = 1+2x+3x^2$	"	vale 1
$f''(x) = 2+2\cdot 3x$	"	vale $2 = 2!$
$f'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3$	"	vale $3!$

I coefficienti dei monomi in $1+x+x^2+x^3$ sono tutti $=$
$\Rightarrow$ per compensare i valori assunti dalle derivate devo dividere $f''(0)$ per $2!$ e $f'''(0)$ per $3!$

Analogamente se il grado del polinomio fosse n e i coefficienti fossero più generali.

DEFINIZIONI

1) la $(\blacktriangledown)$ è detta formula di Taylor (con il resto nella forma di Lagrange) <u>con punto iniziale</u> x_0, arrestata all'ordine n

2) $R_{n+1}(h) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} h^{n+1}$ è detto <u>resto</u> $(n+1)$-esimo

è la parte importante di $(\blacktriangledown)$: stima quel che trascuro

3) $P_n(x_0,h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \dfrac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$

è detto <u>polinomio di Taylor con punto iniziale</u> x_0 <u>di grado</u> n

Se non tutte le derivate sono nulle rappresenta un'approssimazione di $f(x_0+h)$ (quanto buona è chiarito da $R_{n+1}(h)$)

4) Se $x_0=0$ la $(\blacktriangledown)$ diventa
$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}$$
(con $0<c<h$ se $h>0$ o $h<c<0$ se $h<0$)

e si parla di <u>formula di McLaurin</u>.

Dal teorema di Taylor emerge che approssimando

$f(x_0+h)$ con $P_n(x_0,h)$

ciò che si trascura è $o(h^n)$. Per usi pratici (CALCOLO di LIMITI) conviene ricordare anche questa forma del

TEOREMA di TAYLOR (forma di PEANO). Considero $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e $x_0\in(a,b)$. Se esistono $f', f'', \dots, f^{(n)}$ in x_0, per ogni $x_0+h\in(a,b)$ si può scrivere

$$(\blacktriangle)\quad f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+o(h^n)$$

Questa è la cosiddetta forma QUALITATIVA del Teor. di Tayor, mentre la precedente è QUANTITATIVA. Perché?

- Torno al calcolo di $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$

  Miglioro l'approssimazione trovando la formula di McLaurin di e^x arrestata al II ordine (nella forma di Peano)

  $$\left.\begin{aligned} f(x)&=e^x \quad \text{in } x_0=0 \text{ vale } 1\\ f'(x)&=e^x \quad \text{''}\\ f''(x)&=e^x \quad \text{''}\end{aligned}\right] \Longrightarrow e^h=1+h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)$$

  Visto che $x\to 0$ sostituisco $h=x$ e trovo

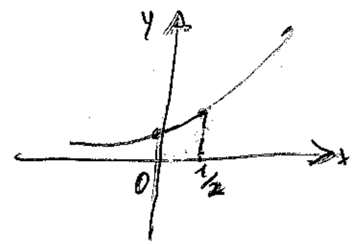
  $$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+x+x^2/2+o(x^2)-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

VEDI PAG 8

- Se invece voglio "Calcolare" $e^{1/2}$ usando la sua approssimazione con il polinomio di McLaurin non è sufficiente rappresentare il resto così, perché voglio sapere se trascuro una parte troppo grande. So che

  $e^h=1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{e^c}{3!}h^3$, $0<c<\frac{1}{2}$: posto $h=\frac{1}{2}$, $\frac{e^c}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3<\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$: TROPPO?

$$e^{1/2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{e^c}{6\cdot8}\qquad \text{con } c\in(0,\tfrac{1}{2})$$



$$\frac{e^c}{6\cdot8}<\frac{e^{1/2}}{6\cdot8}\ ?\ \text{Sì}$$

$e^{1/2}<2$ perché $(e^{1/2})^2=e<4$

$$\frac{e^c}{6\cdot8}<\frac{2}{6\cdot8}=\frac{1}{24}$$

$e^{1/2}\simeq\dfrac{13}{8}$ faccio un errore più piccolo di $1/24$

Ora voglio $e^{1/2}$ con una stima di errore $<\frac{1}{100}$

$$e^h=1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3!}+\dots+\frac{h^n}{n!}+\frac{e^c h^{n+1}}{(n+1)!}$$

$0<c<h$

$h=\frac{1}{2}$. Serve che $\boxed{\dfrac{e^c}{(n+1)!}\,\dfrac{1}{2^{n+1}}<\dfrac{1}{100}}$?

Come devo scegliere n?

$n=3$ e dico che $1<e^c<e^{1/2}<2$

$$\frac{1}{24\cdot16}<\frac{e^c}{4!}\cdot\frac{1}{2^4}<\frac{1}{12\cdot16}<\frac{1}{100}\quad\Longrightarrow\ \text{per } n=3$$

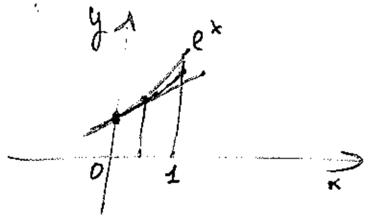
ho approssimazione sicuramente valida

$e^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{e^c}{24\cdot 16}$ — $< \frac{1}{100}$

Uso ancora la formula

$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \dots + \frac{h^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} h^{n+1}$ per trovare

$\boxed{e^1 = e}$ con la frazione di $\frac{1}{100}$. Valuto il resto per $n=3,4,5,6\dots$



$\boxed{n=3}$ $\frac{h^3}{3!}e^c$ per $h=1$ diventa

$\frac{1}{6} < \frac{1}{6}e^c < \frac{1}{6}\cdot e < \frac{1}{2}$

$\boxed{n=4}$ $\frac{h^4}{4!}e^c$ $h=1$

$\frac{1}{24} < \frac{1}{24}e^c < \frac{1}{24}e < \frac{1}{8}$

$\boxed{n=5}$ $\frac{1}{120} < \frac{1^5}{5!}e^c = \frac{1}{120}\cdot e^c < \frac{1}{40}$

$n=6$ $\frac{1}{720} < \frac{1^6}{6!}e^c = \frac{1}{720}e^c < \frac{1}{240}$

$e = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\underbrace{\frac{h^6}{6!}e^c}_{<1/200}$

Infatti

$$\frac{2\cdot 120 + 60 + 20 + 5 + 1}{120} = \frac{326}{120} = 2{,}71\underline{7}\dots$$

Due modi di presentare il problema quantitativo

- Un modo è quello appena visto: se approssimo $e^{1/2}$ con $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 13/8$ commetto un errore sicuramente $<\frac{1}{24}$ ma altrettanto sicuramente $>\frac{1}{48}$ poiché $c>0$ implica $R_3 = \frac{e^c}{48} > \frac{e^0}{48} = \frac{1}{48}$.

- Secondo modo: voglio migliorare questa approssimazione in modo che l'errore che commetto sia sicuramente $<1/100$.

  La formula di McLaurin (nella forma di Lagrange) arrestata all'ordine n è

  $$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \dots + \frac{h^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} h^{n+1}$$

  ove, se $h=1/2$, si ha $0<c<1/2$ ($\Rightarrow$ posso sempre pensare $e^c<2$)

  Devo trovare n in modo che

  $$R_{n+1}(1/2) = \frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{sia} < \frac{1}{100}$$

  Vado per tentativi:

  $n=2$ non va bene

  $n=3$? $R_4(1/2) = \frac{e^c}{4!}\cdot\frac{1}{16} < \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{8} < \frac{1}{100}$: $n=3$ va bene.

  Cioè se scrivo $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}$ al posto di $e^{1/2}$ commetto un errore più piccolo di $\frac{1}{100}$ (ma $>\frac{1}{284}$) ....

Polinomio di Taylor di un polinomio $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n = A$

Esistono tutte le possibili derivate. Notare in particolare che $A^{(n)}(x) = n!\,a_n$ e $A^{(n+1)}=0$. $\Rightarrow$ Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$

$$A(x) = A(x_0) + A'(x_0)(x-x_0) + \frac{A''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{n!\,a_n}{n!}(x-x_0)^n + 0\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

Caso non polinomiale.

Calcoliamo i polinomi di MacLaurin di alcune funz. elementari, col resto nella forma di Peano (utili nel calcolo di $\boxed{\lim_{x\to 0}}$).

$\boxed{f(x) = \operatorname{sen} x}$

$$f^{(2k)}(x) = \pm \operatorname{sen} x \Rightarrow f^{(2k)}(0) = 0$$
$$f^{(1+4k)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(1+4k)}(0) = 1$$
$$f^{(3+4k)}(x) = -\cos x \Rightarrow f^{(3+4k)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Similmente:

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)}$$

poiché $D(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $D^2(\operatorname{tg} x) = \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$

$D^3(\operatorname{tg} x) = 2\frac{\cos^2 x + 3\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}$ etc. o (meglio) $D(\operatorname{tg} x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ ecc.

Ancora:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\operatorname{Sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$$
$$\operatorname{Th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Fare le verifiche, ricordando che il punto iniziale è $x = 0$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\Downarrow$$
$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + \dots + \frac{(-x)^n}{n!} + o(x^n)$$
$$= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{\cancel{1-1}}{\cancel{2}} + \frac{x+x}{2} + \frac{\cancel{x^2/2 - x^2/2}}{\cancel{2}} + \frac{x^3/3! + x^3/3!}{2} + \dots$$
$$+ \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad \text{ove } \boxed{n = 2k+1}$$

$$\operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
con $n = 2k$

$$\boxed{\operatorname{Sh} x + \operatorname{Ch} x = e^x}$$

Osservare che funzioni pari hanno polinomio di McLaurin con sole potenze pari; funz. dispari con sole potenze dispari.

Osservare che nelle funzioni limitate i segni si alternano.