Polinomi di Taylor e di MacLaurin

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

i) $f, f', f'', \dots f^{(n)}$ esistono e sono continue in $[a,b]$

ii) esiste la derivata $(n+1)$-ma in (a,b)

Se $x_0, x_0+h \in (a,b)$ esiste $c \in (a,b)$, compreso nell'intervallo di estremi x_0, x_0+h t.c. $=x$

$$f(x_0+h) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1} \qquad h = (x - x_0)$$

approssimazione con il resto nella forma di Lagrange

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$; $\exists\ f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$

Se $x_0, x_0+h \in (a,b)$

$$f(x_0+h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot h^i + o(h^n)$$

approssimazione con il resto nella forma di Peano

$\boxed{x_0 = 0}$

$$f(h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} h^i + o(h^n)$$

$\boxed{h = x}$ $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i + o(x^n)$

Se $x_0 = 0$: formula di MacLaurin

$\boxed{0! = 1}$ $\boxed{1! = 1}$

$$f(x) = \ln(1+x)$$

i	$f^{(i)}(x)$	$f^{(i)}(0)$	$f^{(i)}(0)/i!$
0	$\ln(1+x)$	$\ln(1) = 0$	$0/0! = 0$
1	$\frac{1}{1+x}$	$\frac{1}{1+0} = 1$	$1/1! = 1$
2	$\frac{-1}{(1+x)^2}$	$\frac{-1}{1^2} = -1$	$-1/2! = -\frac{1}{2}$
3	$\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3} = 2(1+x)^{-3}$	$\frac{2}{1^3} = 2$	$2/3! = \frac{1}{3}$
4	$-2\cdot 3\,(1+x)^{-4}$	$-2\cdot 3 = -3!$	$-\frac{3!}{4!} = -\frac{1}{4}$
5	$+2\cdot 3\cdot 4\,(1+x)^{-5}$	$2\cdot 3\cdot 4 = 4!$	$\frac{(5-1)!}{5!} = \frac{1}{5}$

$$\ln(1+x) = 0 + 1\cdot x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{k}x^k + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = (-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{3}(-x)^3 - \frac{1}{4}(-x)^4 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n} + o(x^n) =$$

$$= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots - \frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

$(1+x)^\alpha \boxed{= 1 + \alpha x + o(x)}$ Precisiamo

i	$f^{(i)}(x)$	$f^{(i)}(0)$	$f^{(i)}(0)/i!$
0	$(1+x)^\alpha$	$(1+0)^\alpha = 1^\alpha = 1$	$1/1 = 1$
1	$\alpha(1+x)^{\alpha-1}$	$\alpha(1+0)^{\alpha-1} = \alpha$	$\alpha/1 = \alpha$
2	$\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$	$\alpha(\alpha-1)$	$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$
3	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$	$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}$
$\vdots$			
n	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)\boxed{(1+x)^{\alpha-n}}$	$\cdots$	$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

e $\alpha \in \mathbb{N}$: $\alpha = k$. Nello sviluppo della potenza k-esima del binomio

$$(1+x)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i \qquad \text{ove} \quad \binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!}$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$$

uso la stessa notazione per rappresentare i coefficienti appena trovati

$\alpha = 1/2$:
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{8}\right)x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{16}\cdot\frac{(1/2-3)}{4}x^4 + o(x^4)$$

arrestandoa $n=4$.

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{(-1)(-1-1)}{2}x^2 + \frac{(2)(-1-2)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$= 1 - x + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x^2 - \frac{2\cdot\cancel{3}}{\cancel{3!}}x^3 + \frac{(2\cdot 3)(-1-3)}{4!}x^4 \cdots$$
$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 \cdots +$$
$$+ (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \cdots (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Per esercizio calcolare il pol. di Mac. Laurin arrestato al 4° ordine di $\frac{1}{1+x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{(1+x)(\ln(1+x))^2}$$

Uso delle formule di MacLaurin con il resto nella forma di Peano

Denominatore: è un prodotto; bastano le formule asintotiche. So che per $x \to 0$ $\ln(1+x) \sim x$
$(\ln(1+x))^2 \sim x^2$

Numeratore: Somma $\Rightarrow$ non posso usare gli asintotici
$\ln(1+x) = x + o(x)$ formula di ML arrestata al 1° ord.

$N = (1+x)(x + o(x)) - x = x^2 + o(x) = o(x)$ non ci vedo chiaro

approssimo al secondo ordine

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$N = (1+x)(x - x^2/2 + o(x^2)) - x = \cancel{x} - x^2/2 + x^2 + o(x^2) - x^3/2 + o(x^3) - \cancel{x}$

$\Rightarrow N = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} \frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{(1+x)(\ln(1+x))^2} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{(1+x)x^2} = \frac12$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1-x^2+5x^4}{(4\,\mathrm{sen}\,2x+x^3)^3} =$$

Denominatore $\mathrm{sen}\,2x = \overbrace{2x - \frac{(2x)^3}{3}}^{2x+o(x)} + o(x^3)$

$$4\,\mathrm{sen}\,2x + x^3 = 8x - \boxed{\frac{32}{3}x^3 + x^3 + o(x^3)}$$

$8x + o(x) + x^3 = 8x + o(x)$ BASTA

Numeratore

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\boxed{e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)} \quad \boxed{t = x^2}$$

$$N = \cancel{1} + \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \cancel{1} - \cancel{x^2} + 5x^4 =$$

$$= \frac{11}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1-x^2+5x^4}{(4\,\mathrm{sen}\,2x+x^3)^3} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{11}{2}x^4+o(x^4)}{(8x)^3} = 0$$

$$(8x+o(x))^3 = 8^3x^3 + \underbrace{3\cdot64\,x^2 o(x) + 3\cdot 8x\,(o(x))^2 + (o(x))^3}_{o(x^3)}$$

Torniamo a

$$\lim_{x\to0} \frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{(1+x)(\ln(1+x))^2}$$

. Risulta $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Sostituisco questa approssimazione migliore SOLO dove serve:

$$= \lim_{x\to0} \frac{(1+x)(x - x^2/2 + o(x^2)) - x}{(1+x)\,x^2} = \lim_{x\to0} \frac{x + x^2 - x^2/2 - x^3/2 + o(x^2) - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2} = \frac12$$

Notare che $-x^3/2 = o(x^2)$ e quindi è stato "dimenticato"

Altro esempio

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2}-1-x^2+5x^4}{(4\,\mathrm{sen}2x+x^3)^3}$$

: approssimo $e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$
$\mathrm{sen}2x = 2x+o(x)$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1+x^2+o(x^2)-1-x^2+5x^4}{(4\cdot2x+o(x)+x^3)^3} = \lim_{x\to0} \frac{5x^4+o(x^2)}{(8x+o(x))^3}$$

ATTENZIONE: $x^4 = o(x^2) \Rightarrow 5x^4 + o(x^2) = o(x^2)$

Approssimazione insufficiente al numerat

$\Rightarrow$ approssimo meglio: $e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$

Il limite diventa:

$$\lim_{x\to0} \frac{x^4/2+5x^4+o(x^4)}{8^3x^3+o(x^3)} = \lim_{x\to0} \frac{11/2\,x^4}{8^3x^3} = 0.$$

Una conseguenza dei teoremi di Taylor. (Vedi pag. succ.)

Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ammette derivate $f',\dots,f^{(n)}$ in un intorno di x_0 e $f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ ma $f^{(n)}(x_0)\neq0$,

Se n è pari e $f^{(n)}(x_0)>0$: x_0 è pto di minimo rel.
$f^{(n)}(x_0)<0$: x_0 " " massimo rel

Se n è dispari f ha in x_0 un punto di flesso a tg orizz.

Infatti $f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,h^n + o(h^n)\dots$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + 0 + \dots + 0 + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, h^n + o(h^n)$$

$\boxed{n \text{ sia pari}}$

tanto se $h>0$ che se $h<0$: $h^n > 0$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, h^n$$ ha il segno di $f^{(n)}(x_0)$

$\Rightarrow$ se $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0+h) > f(x_0)$

cioè in un intorno sufficientemente piccolo di x_0 la funzione è $> f(x_0)$

$\Rightarrow$ x_0 punto di minimo relativo

Viceversa se $f^{(n)}(x_0) < 0$: x_0 p.to di max relativo

---

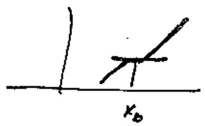
n dispari

se $h>0$ $\quad h^n > 0$

$h<0$ $\quad h^n < 0$

$f^{(n)}(x_0) > 0$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, h^n \begin{cases} >0 & \text{se } h>0 \\ <0 & \text{se } h<0 \end{cases}$$



flesso a tg orizz. crescente

$f^{(n)}(x_0) < 0$ $\qquad$ <0 se $h>0$

>0 se $h<0$

flesso decrescente

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left[(\arctan x)^2 - x^2 + \frac{2}{3}x^4\right]$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$(\arctan x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{x^6}{9} + o(x^4) + o(x^6) + (o(x^3))^2$$

$$= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$(\arctan x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right)^2 =$$

$$= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{5}x^6 + o(x^6) + \frac{x^6}{9} - \frac{2}{15}x^8 + \frac{x^{10}}{25} + o(\ )\dots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left(\cancel{x^2} - \cancel{\frac{2}{3}x^4} + \frac{23}{45}x^6 + o(x^6) - \cancel{x^2} + \cancel{\frac{2}{3}x^4}\right)$$

$$= \frac{23}{45}$$

Potrei applicare il teorema di de L'Hospital? Sì ma è + complicato!

A) devo conoscere l'enunciato

B) devo saper fare le derivate

C) devo derivare varie volte cercando la giusta strategia per non peggiorare la situazione

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left[(\arctan x)^2 - x^2 + \frac{2}{3}x^4\right] = \text{de l'H.}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2}\arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2} - \cancel{2}x + \frac{\cancel{8}\,4}{3}x^3}{3\,\cancel{6}\,x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x(1+x^2) + \frac{4}{3}x^3(1+x^2)}{3x^5(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1 - 3x^2 + 4x^2 + \frac{20}{3}x^4}{3(5x^4 + 7x^6)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + (x^2 - 1 + \frac{20}{3}x^4)(1+x^2)}{3(5x^4+7x^6)(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + \frac{20}{3}x^4 + \frac{20}{3}x^6}{15x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 \cdot \frac{23}{3} + o(x^4)}{15x^4 + o(x^4)} = \frac{23}{45}.$$

Enunciato del teorema di de l'Hospital per il calcolo dei limiti con forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

- Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ (eventualmente $a=-\infty$, $b=+\infty$) derivabili in (a,b)
- Siano $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$
- Se $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = 0$
- ed esiste $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Allora $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Si può anche lavorare con $\lim_{x\to b^-}$

Si può anche sostituire la II ipotesi con $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty$

Esercizi. Calcolare i seguenti limiti

1) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen} x^2}{(1-\cos x^2)^2}$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x}{3x^2}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left(\operatorname{arctg}^2 x - x^2 + \frac{2}{3}x^4\right)$

Determinare il polinomio di Taylor di $\ln x$ di 3° grado con punto iniziale $x_0 = 2$

Usando la formula di McLaurin con il resto nella forma di Lagrange valutare $\operatorname{sen} \frac{1}{3}$ in modo che l'errore commesso sia $< \frac{1}{10^3}$.