$\boxed{\tan x}$ sviluppo di Mac Laurin arrestato al 5 ordine

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\tan x$	0
1	$1+\tan^2 x$	$1/1! = 1$
2	$2\tan x(1+\tan^2 x) = 2[\tan x + \tan^3 x]$	0
3	$2(1+\tan^2 x)(1+3\tan^2 x) =$ $2(1+4\tan^2 x + 3\tan^4 x)$	$2/3! = 1/3$
4	$2(1+\tan^2 x)(8\tan x + 12\tan^3 x) =$ $= 2(8\tan x + 20\tan^3 x + 12\tan^5 x)$	0
5	$2(1+\underline{\tan^2 x})(8+\underline{60\tan^2 x} + \underline{60\tan^4 x})$	$16/5! = \frac{\cancel{16}\,2}{\cancel{2\cdot3\cdot4}\cdot5} = \frac{2}{15}$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

Funzioni di PIÙ VARIABILI

Si hanno ogni volta che l'ESITO (dato in uscita) dipende non da 1 solo ma da 2 o PIÙ DATI DI INGRESSO

Es. 1 $\quad V = k\frac{T}{P}$ $\quad$ (k costante >0) : il volume di un gas perfetto dipende da temperatura e pressione

Es. 2 $\quad \mathcal{a} = b\cdot h$ $\quad$: l'area di un rettangolo dipende dalla sua base e dalla sua altezza.

PER ORA CONSIDERIAMO SOLO FUNZIONI DI DUE VARIABILI.

È essenziale, per sviluppare successivamente la teoria, ORDINARE IN MODO UNIVOCO I DATI IN INGRESSO, cioè decidere che una certa variabile è da considerare come la PRIMA, un'altra come SECONDA ecc. Ciò non comporta un giudizio di importanza!

Ad es. nel caso del gas perfetto posso pensare T come 1ª variabile e P come 2ª e allora scriverò

$$V = V(T,P)$$

o viceversa e allora scriverò $\quad V = V(P,T)$. L'importante è che si resti fedeli alle scelte fatte.

Questa osservazione mette in luce che

l'insieme di definizione di una funzione di 2 variabili è un insieme di coppie ordinate di numeri reali, cioè un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^2$.

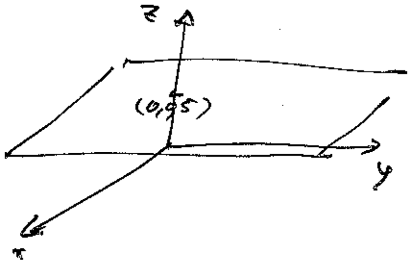
(similmente se le variabili sono $n (\geq 2)$, l'insieme di definizione della funzione è un s.i. E di $\mathbb{R}^n$)

Invece l'IMMAGINE di queste funzioni sarà ancora $\subseteq \mathbb{R}$.

Esempi elementarissimi

0) $f(x,y) = \text{cost.}$ ad es. $f(x,y) = 5$

$z = 5$



1) $f(x,y) = ax + by + c$ ad es. $a=1,\ b=1,\ c=1$

$f(x,y) = x + y + 1$

$z = x + y + 1$

$\boxed{-x-y+z=1}$

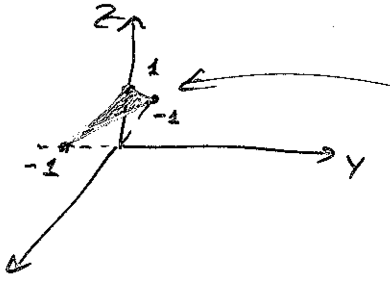


grafico relativamente al box (cubico)

$x \in [-1,0]$

$y \in [-1,0]$

$z \in [0,1]$

FORMALMENTE:

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Una funzione reale di due variabili reali con insieme di definizione E

$$f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

è una corrispondenza che a OGNI $(x,y) \in E$ associa UNO E UN SOL NUMERO REALE $z = f(x,y)$

GRAFICO: in $Oxyz$ si considera $\{(x,y,f(x,y)),\ (x,y) \in E\}$

Nei casi più comuni è una superficie che rappresenteremo più semplicemente scrivendo: $z = f(x,y)$.

Es1 $z = x^2+y^2$: definita su tutto $\mathbb{R}^2$, a valori in $[0,+\infty)$

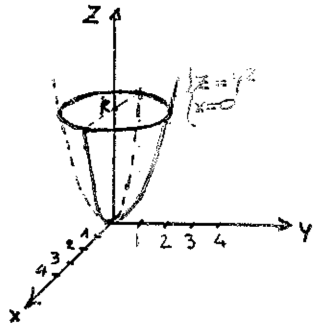
Per "vedere" il grafico osservo che

1) sezioni con piani $z = k$ $(k \geq 0)$ danno luogo alle circonferenze $\begin{cases} x^2+y^2=k \\ z = k \end{cases}$

2) sezioni con i due piani coordinati $x=0$ e $y=0$ danno luogo rispettivamente alle parabole

$\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$

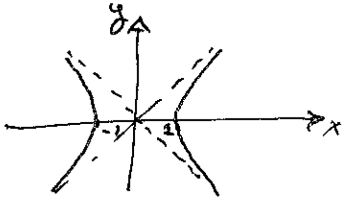
... PARABOLOIDE DI ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE z.



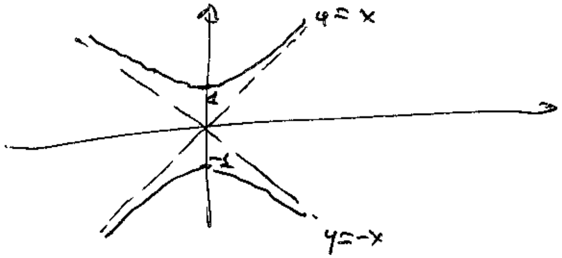
Es. 2 $z = x^2-y^2$: definita su $\mathbb{R}^2$, a valori in $\mathbb{R}$.

Operando come sopra: PARABOLOIDE A SELLA

$\begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ z = 1 \end{cases}$ Sul piano di eq. $z=1$ considero l'iperbole di eq. $x^2-y^2=1$

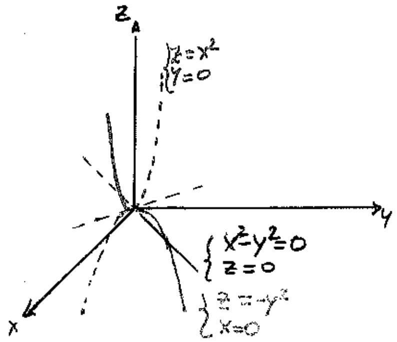


$\begin{cases} z = x^2-y^2 \\ z = -1 \end{cases}$ Sul piano $z=-1$ considero l'iperbole di eq. $x^2-y^2=-1$ cioè $y^2-x^2=1$



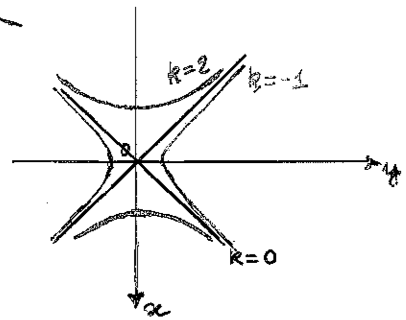
$\begin{cases} z = x^2-y^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$ sul piano $x=0$ trovo $z=-y^2$ parab. verso il basso

$\begin{cases} z = x^2-y^2 \\ y = 0 \end{cases}$ su $y=0$ trovo $z=x^2$ parab. verso l'alto



Non è facile leggere il grafico: conviene ad es. rappresentare la proiezione sul piano xOy delle curve che si ottengono per sezione con piani $\perp$ asse z, della forma $z=k$

Si vede che per $k>0$ le curve sono tutte disposte come l'iperbole rossa mentre per $k<0$ sono disposte come l'iperbole verde e quindi in $(0,0)$ si viene a creare un'insellatura (... dov'è l'arcione? ... e le staffe?)



ES.3 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$: definita purché $1-x^2-y^2 \geq 0$.

Quindi $E = \{ (x,y) : x^2+y^2 \leq 1 \}$: cerchio di raggio 1

i valori assunti sono contenuti in $[0,1]$

Si ha $f(x,y)=0$ sul bordo (= circonferenza) di E

$f(x,y)=1$ in $(0,0) \Rightarrow$

$(0,0)$: punto di massimo per la funzione

punti della circonferenza invece sono punti di minimo

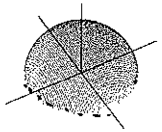
Il GRAFICO è una SEMISFERA.

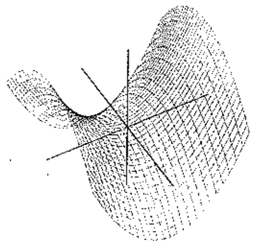
ES. 4 $z = \sqrt{(x^2+y^2-2x)(4x-x^2-y^2)}$: definita purché $(x^2+y^2-2x)(4x-x^2-y^2) \geq 0$ cioè nei punti compresi tra le 2 circonferenze $(x-1)^2+y^2=1$ e $(x-2)^2+y^2=4$

Sulle 2 circonferenze vale 0. Altrove >0. HA UN MAX.?

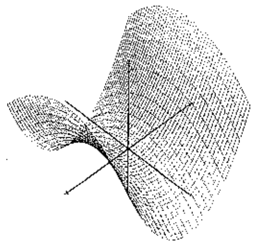
Funzioni di due variabili

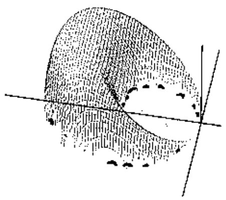
$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

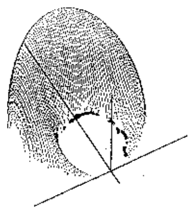




$f(x,y) = x^2 - y^2$







$f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-2x)(4x-x^2-y^2)}$;

Per trovare l'ID: guardo dove sono ≥ 0 i due fattori

$x^2+y^2-2x \geq 0$ cioè $(x-1)^2+y^2 \geq 1$ esterno del cerchio di centro $(1,0)$ $R=1$

$4x-x^2-y^2 \geq 0$ cioè $(x-2)^2+y^2 \leq 4$ interno " " " " $(2,0)$ $R=2$

Non ci sono punti in cui entrambe le disequazioni risultano non soddisfatte. Quindi il dominio è quello indicato nella figura nella pag successiva con tratteggio

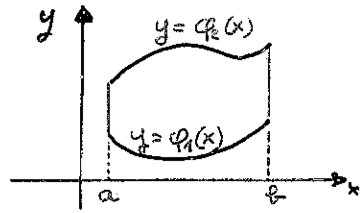
Cerchiamo di generalizzare la teoria vista in 1 variabile.

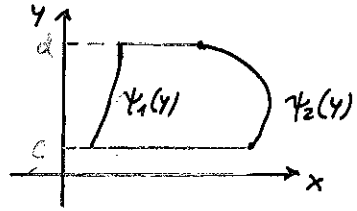
Anzitutto: come con funzioni di 1 variabile abbiamo ristretto l'attenzione a funzioni definite su intervalli (o loro unioni) qui la restringiamo a funzioni definite su "domini semplici" (o loro unioni finite) intendendo per dominio semplice un s.i. E di $\mathbb{R}^2$ del tipo

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b \text{ e } \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x) \text{ con } \varphi_1, \varphi_2 \text{ continue in } (a,b)\}$$

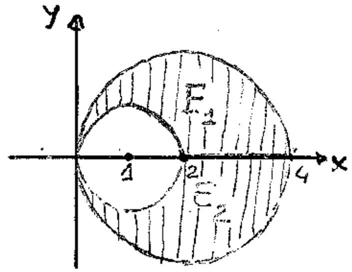
oppure

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c < y < d \text{ e } \psi_1(y) < x < \psi_2(y) \text{ con } \psi_1, \psi_2 \text{ continue in } (c,d)\}$$





Nel caso dell'ultimo esempio.



l'insieme di definiz. è unione di due domini semplici E_1 ed E_2 del 1° tipo

Si dice che $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ se e solo se

PER OGNI $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon)$ $(\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0)$ tale che

se $0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ allora $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

Il concetto di limite è indipendente dal modo con cui il punto (x,y) si avvicina ad (a,b). In particolare il limite se esiste è unico.

ES. 5 $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ per $(x,y)\to(0,0)$ tende a 1.

Infatti se passo in coordinate polari ($x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$) la funzione si riscrive $\dfrac{\operatorname{sen}\rho}{\rho}$ ed è noto che
$\lim_{\rho\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\rho}{\rho}=1$

... o, se si preferisce, fissato $\varepsilon>0$, esiste $\delta=\delta(\varepsilon)$ t.c.
se $\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ si ha $\left|\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right|=\left|\dfrac{\operatorname{sen}\rho}{\rho}-1\right|<\varepsilon$.

ES. 6 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ è definita in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ e

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ <u>non esiste</u>.

Il modo più semplice di vederlo è passare in coordinate polari. La funzione ottenuta sostituendo $x=\rho\cos\theta$ $y=\rho\operatorname{sen}\theta$ è

$$f(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)=\frac{2\rho^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}=\frac{\rho^2\operatorname{sen}2\theta}{\rho^2\cdot 1}=\operatorname{sen}2\theta$$

che ha lo stesso valore in tutti i punti della semiretta di origine $(0,0)$ che forma con la semiretta delle $x>0$ un angolo θ

In particolare

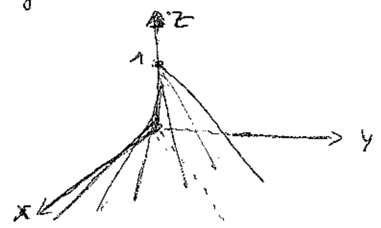
$\theta=0 \Rightarrow$ nei punti di E della forma $(h,0)$ (con $h>0$): $f(h,0)=0$

$\theta=\pi/2 \Rightarrow (\operatorname{sen}2\theta=0)$ nei punti $(0,h)$ con $h>0$: $f(0,h)=0$

ma

$\theta=\pi/4 \Rightarrow (\operatorname{sen}2\theta=1)$ nei punti (h,h) con $h>0$: $f(h,h)=1$

Quindi avvicinandosi all'origine lungo gli assi x,y si tende a 0, avvicinandosi lungo la bisettrice del 1° quadrante si tende a 1:
Cioè non esiste il limite!



$f(x,y)$ è detta continua in (a,b) se $f(x,y)$ è
- definita in (a,b) e in un suo intorno $U=\{(x,y):\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\rho\}$
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$.

<u>Esempi di funzioni continue</u>: 1, 2, 3, 4 ; 5 se completo la def. ponendo $f(0,0)=1$; 8 se completo la def. ponendo $f(0,0)=0$.

Per le funzioni continue in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ valgono teoremi analoghi a quelli delle funz. d'1 variabile.
In particolare:

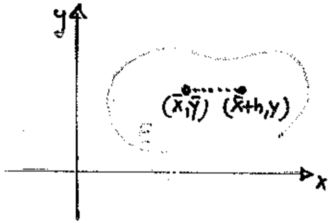
Sia $f: E\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continua su un sottoinsieme chiuso e limitato di E (ad esempio su un disco, circonferenza compresa). Allora
- l'immagine mediante f di tale s.i. limitato è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$
- esistono punti del s.i. chiuso e limitato di E in cui f assume valore massimo e valore minimo

L'esempio 1 e l'esempio 3 (se tolgo la circonferenza da E) mostrano che l'ipotesi che E (o un ~~sto~~ sottoinsieme) sia limitato e sia chiuso sono entrambe necessarie.

Dagli esempi è chiaro che la continuità in dimensione >1 è cosa delicata. A maggior ragione lo sarà l'approssimazione lineare che vogliamo fare per studiare min. e MAX relativi.

DERIVATE PARZIALI

$f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua in E. Siano $(\bar{x},\bar{y}) \in E$; $h \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo in valore assoluto perchè $(\bar{x}+h,\bar{y}) \in E$.



Se esiste finito

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h,\bar{y})-f(\bar{x},\bar{y})}{h}$$

dirò che esso è la derivata parziale di f rispetto a x nel punto $(\bar{x},\bar{y})$ e la denoterò con

$$f_x(\bar{x},\bar{y}) \quad o \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) \quad o \quad D_x f(\bar{x},\bar{y})$$

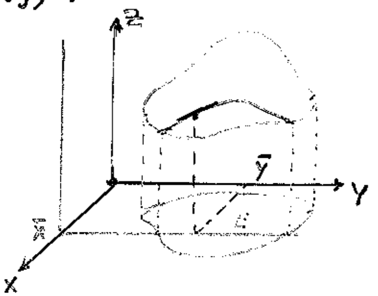
È come tenere fisso y in $f(x,y)$ e pensare f come funzione della sola x.

Analogamente se $k \in \mathbb{R}$ è abbastanza piccolo in valore assoluto perchè $(\bar{x},\bar{y}+k) \in E$ ed esiste finito

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(\bar{x},\bar{y}+k)-f(\bar{x},\bar{y})}{k} := f_y(x,y)$$

dico che il limite è la derivata parziale di f rispetto a y in $(\bar{x},\bar{y})$

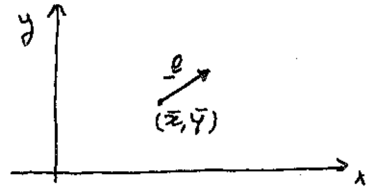
Ovviamente la derivata parziale di f rispetto a y in $(\bar{x},\bar{y})$ è il coeff. angolare della retta tangente in $(\bar{x},\bar{y})$ alla curva sezione del grafico di $f(x,y)$ con il piano $x=\bar{x}$ (similmente $f_x(\bar{x},\bar{y})$)



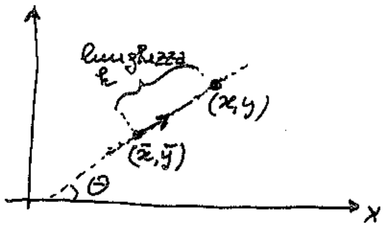
Quindi $f_y(x,y)$ misura la velocità di variazione della quota $z=f(x,y)$ quando (x,y) si muove nella direzione dell'asse y ....

Se volessi la velocità di variazione della quota muovendosi in una direzione diversa da quella degli assi dovrei:

1) indicare un versore della direzione : $\ell = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$



2) individuare il punto variato attraverso questo versore



$$\begin{cases} x-\bar{x} = h\cos\theta \\ y-\bar{y} = h\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x=\bar{x}+h\cos\theta \\ y=\bar{y}+h\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

3) calcolare il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(\bar{x}+h\cos\theta,\bar{y}+h\operatorname{sen}\theta)-f(\bar{x},\bar{y})}{h}$$

Se esiste finito questo limite sarà detto derivata di f in direzione $\underline{\ell}$ nel punto $(\bar{x},\bar{y})$ e denotato con $\dfrac{\partial f}{\partial(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)}$

In ipotesi opportune questa definizione può essere semplificata (vedi pag. successiva)

1ª oss. Se in $(\bar{x},\bar{y})$ sono definite entrambe le derivate parziali, è definito un vettore che ha tali derivate come componenti. Esso sarà detto GRADIENTE di f in (x,y):

$$\text{grad } f\,(\bar{x},\bar{y}) = (f_x(\bar{x},\bar{y}),\ f_y(\bar{x},\bar{y}))$$

Es $f(x,y) = (x+y)e^{xy}$

$f_x(x,y) = e^{xy} + (x+y)(ye^{xy}) = e^{xy}(1+xy+y^2)$

$f_y(x,y) = e^{xy}(1+xy+x^2)$

$\text{grad } f\,(x,y) = e^{xy}(1+xy+y^2,\ 1+xy+x^2)$

Esso vale $(1,1)$ nell'origine e in generale $(1,1+x^2)$ in $(x,0)$.

2ª oss. Supponiamo che in ogni (x,y) interno a E esistano le derivate f_x, f_y e siano funzioni CONTINUE in E. Sia $\underline{\ell} = \underline{\ell}(x,y)$ un versore definito in (x,y).

La derivata di f nella direzione di $\underline{\ell}$ nel punto (x,y) è il prodotto scalare

$$(\text{grad } f \cdot \underline{\ell} := \frac{\partial f}{\partial \underline{\ell}}(x,y)$$

Ovviamente $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{i}} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{j}} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

La derivata di f nella direzione $\underline{\ell}$ in $(\bar{x},\bar{y})$ misura la velocità di variazione della quota muovendosi da $(\bar{x},\bar{y})$ nella direzione del versore $\underline{\ell}$.

Detto α l'angolo tra grad f e $\underline{\ell}$ (nel punto $(\bar{x},\bar{y})$) si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\ell}} = \text{grad } f \cdot \underline{\ell} = |\text{grad } f| \cos\alpha$$

ed è quindi massima se grad f e $\underline{\ell}$ hanno ugual direzione e verso, minima se la direzione è = ma il verso opposto e nulla se sono ortogonali.

Dunque grad f calcolato in (x,y) dà la direzione di massima pendenza del grafico in (x,y); un versore ad esso ortogonale individua la direzione in cui non c'è variazione di pendenza ($\Rightarrow$ curva di livello ... cammino in quota)

Leggere una carta geografica in quest'ottica.

ATTENZIONE Una funzione di due (o più) variabili può avere derivate direzionali in tutte le direzioni in un certo punto e con tutto ciò NON ESSERE CONTINUA nel punto. Ad es.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{non è continua in } (0,0) \ (\text{vedi es.7})$$

ma per ogni versore $\underline{\ell} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\ell}}(0,0) = \lim_{h\to 0+}\left(\frac{2(h\cos\theta)^2(\cancel{h}\operatorname{sen}\theta)}{h^4\cos^4\theta + h^2\operatorname{sen}^2\theta}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0+}\frac{2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{h^2\cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta}$$

che se $\operatorname{sen}\theta = 0$ vale 0

se $\operatorname{sen}\theta \neq 0$ vale $2\dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

Ciò è legato alla non continuità delle derivate parziali in $(0,0)$

Ad es. $f_y = \dfrac{2x^2(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2} = \dfrac{2\rho^4(\cos\theta)^2(\rho^2\cos^4\theta - \operatorname{sen}^2\theta)}{\rho^4(\rho^2\cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta)^2}$

andando a $(0,0)$ lungo l'asse x $(\theta=0)$ si comporta come $2/\rho^2$ e quindi $\to +\infty$, mentre avvicinandoci lungo l'asse y $(\theta=\frac{\pi}{2})$ tende a 0.