(1)

$f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

dominio
immagine
grafico
limite .... continuità

OTTIMIZZAZIONE

$\operatorname{grad} f(\bar{x},\bar{y}) = (f_x(\bar{x},\bar{y}), f_y(\bar{x},\bar{y}))$

f_x, f_y casi particolari di derivate direzionali

se $\underline{e}$ è un versore di una qualunque altra direzione e f_x, f_y sono continue in E allora $\forall (\bar{x},\bar{y}) \in E$

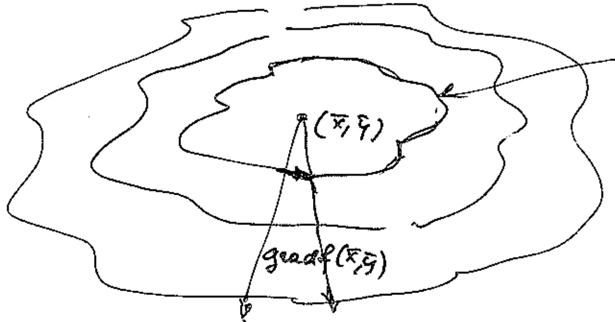
$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\bar{x},\bar{y}) = \operatorname{grad} f(\bar{x},\bar{y}) \cdot \underline{e}$$

$$= |\operatorname{grad} f(\bar{x},\bar{y})| \cdot 1 \cdot \cos(\operatorname{grad} f(\bar{x},\bar{y}), \underline{e})$$

è massima in valore assoluto se $\operatorname{grad} f(\bar{x},\bar{y})$ e $\underline{e}$ formano un angolo nullo o di π

$\xrightarrow[\underline{e}]{\text{grad}}$ $\qquad$ $\overset{e}{\longleftarrow\!\!\longrightarrow}_{\text{grad.}}$

è minima in val. assoluto se gli stessi vettori sono $\perp$



Curve di livello

RIASSUNTO di IERI

(2)

Invece se – come abbiamo supposto parlando di gradiente – le derivate parziali f_x e f_y sono continue in $(\bar{x},\bar{y})$ si riesce a ricavare un risultato più forte della continuità di $f(x,y)$ in $(\bar{x},\bar{y})$. Precisamente

> Se f_x e f_y sono continue in $(\bar{x},\bar{y})$ allora
> $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(\bar{x}+h,\bar{y}+k) - f(\bar{x},\bar{y}) - h f_x(\bar{x},\bar{y}) - k f_y(\bar{x},\bar{y})}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$
> cioè la funzione $f(x,y)$ è <u>differenziabile in</u> $(\bar{x},\bar{y})$

(e in tal caso è continua in $(\bar{x},\bar{y})$ poiché

(•) $f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) = f(\bar{x},\bar{y}) + h f_x(\bar{x},\bar{y}) + k f_y(\bar{x},\bar{y}) + o(\sqrt{h^2+k^2}) \dots$)

Differenziabilità significa che in $(\bar{x},\bar{y})$ la funzione $f(x,y)$ può essere approssimata con un polinomio di 1° grado in x, y o – come si suol dire – può essere LINEARIZZATA.

Graficamente ciò significa che il grafico della funzione in prossimità di $(\bar{x},\bar{y})$ può essere approssimato con un piano "tangente" in $(\bar{x},\bar{y})$ al grafico. Tale piano ha equazione (vedi (•))

$$z - f(\bar{x},\bar{y}) = f_x(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) + f_y(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y}).$$

Notiamo che il suo vettore direzionale ha la forma

$$((\operatorname{grad} f)(\bar{x},\bar{y}) \mid -1).$$

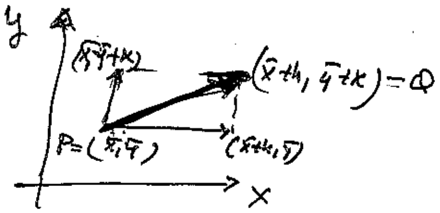
Es. $f(x,y) = x \ln(xy)$ (definita nel 1° e nel 3° quadrante)

$f_x = \ln(xy) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(xy) + 1$; $f_y = \frac{x}{y}$

Il piano tangente al grafico nel punto di ascissa e ordinata 1 ($\Rightarrow f(1,1) = 0$, $f_x = 1$, $f_y = 1$) è

$z = (x-1) + (y-1)$.

$\boxed{\text{Commenti alla pagina 2}}$ (3



$$f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) = f(\bar{x},\bar{y}) + h f_x(\bar{x},\bar{y}) + k f_y(\bar{x},\bar{y}) + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

$$= f(\bar{x},\bar{y}) + (f_x(\bar{x},\bar{y}), f_y(\bar{x},\bar{y}))\cdot(h,k) + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

Formula di Taylor arrestata al 1° ordine di funz. di 2 variabili

---

$\bar{x}+h = x \qquad \bar{y}+k = y$ e quindi

$$f(x,y) = f(\bar{x},\bar{y}) + (f_x(\bar{x},\bar{y}), f_y(\bar{x},\bar{y}))\cdot(x-\bar{x}, y-\bar{y}) + o\left(\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}\right)$$

$z = f(\bar{x},\bar{y}) + \operatorname{grad} f(\bar{x},\bar{y})\cdot(x-\bar{x}, y-\bar{y})$ ← equazione del piano tangente

oppure

$$\operatorname{grad} f(\bar{x},\bar{y})\cdot(x-\bar{x}, y-\bar{y}) - (z - f(\bar{x},\bar{y})) = 0$$

$\Rightarrow$ quindi il vettore direzionale del piano tangente ha la forma

$(\operatorname{grad} f(\bar{x},\bar{y}) \mid -1)$

(4

ES. $f(x,y) = x^4 - 4x^2y^2 + y^4 + 5x^2 - y^2$

piano tangente in $P = (0,1)$

$f(x,y)$, f_x, f_y saranno continue in $\mathbb{R}^2$ in quanto polinomi.

$f_x = 4x^3 - 8xy^2 + 10x$

$f_y = -8x^2y + 4y^3 - 2y$

$f_x(0,1) = 0 \qquad f_y(0,1) = 4-2 = 2$

$f(0,1) = 1 - 1 = 0$

eq. del piano tangente in P:

$$z - 0 = 0(x-0) + 2(y-1)$$

$$\boxed{z = 2(y-1)}$$

Questo piano è parallelo all'asse x?

vettore direzionale del piano: $(0,2,-1)$

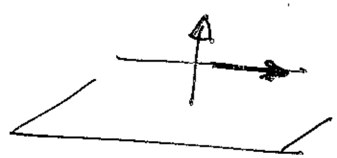
vettore " dell'asse x: $(1,0,0)$

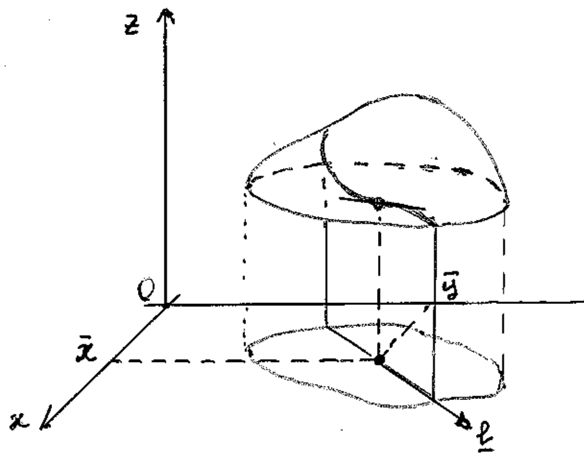
$(0,2,-1)\cdot(1,0,0) = 0\cdot 1 + 2\cdot 0 - 1\cdot 0 = 0$

i due vettori direzionali sono ortogonali

$\Downarrow$

retta e piano sono //

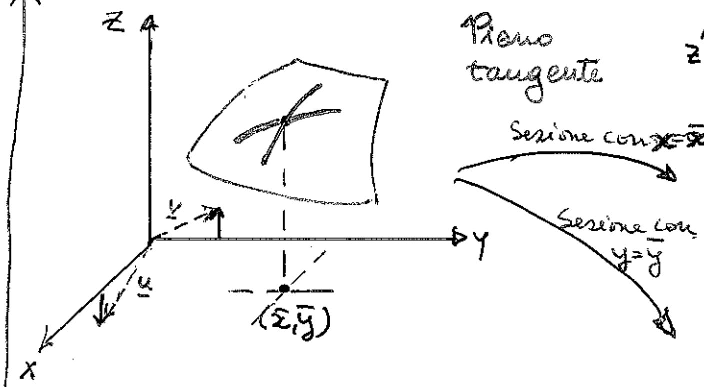


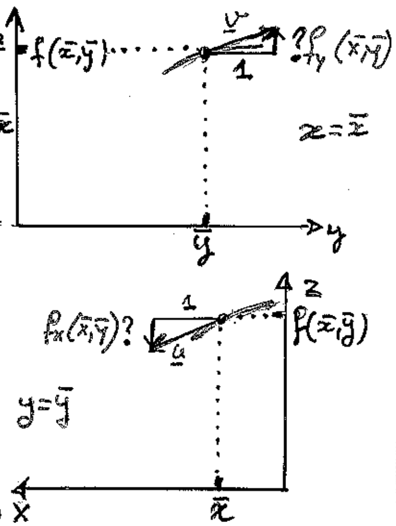


Derivata direzionale $f_{\underline{\ell}}(\bar{x},\bar{y})$

$$\underline{u}\wedge\underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & f_x(\bar{x},\bar{y}) \\ 0 & 1 & f_y(\bar{x},\bar{y}) \end{vmatrix} = \left(-f_x(\bar{x},\bar{y}), -f_y(\bar{x},\bar{y}), 1\right)$$

Il vettore così individuato è l'opposto (e quindi dà la stessa direzione) del vettore individuato a pag 2 come vettore direz. del piano tangente





$\underline{u} = (1, 0, f_x(\bar{x},\bar{y}))$: vettore che dà la direz. della tang. al grafico di $f(x,\bar{y})$ (in $\bar{x},\bar{y},f(\bar{x},\bar{y})$)

$\underline{v} = (0, 1, f_y(\bar{x},\bar{y}))$: analogo

il vettore direzione del piano che contiene $\underline{u}$, $\underline{v}$ è $\underline{u}\wedge\underline{v}$.

Derivate seconde

Supponiamo che in ogni punto interno di E sia definita f_x e f_y e che queste funzioni abbiano derivate parziali rispetto a x e a y: nascono quattro derivate seconde

$$f_{xx} = (f_x)_x, \quad f_{xy} = (f_x)_y \quad f_{yx} = (f_y)_x \quad f_{yy} = (f_y)_y$$

che talora vengono anche indicate così:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}_{\text{derivate miste}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Nell'esempio precedente: $f(x,y) = x\ln(xy)$, si ha

$f_{xx} = (\ln(xy)+1)_x = \frac{1}{x}$; $f_{xy} = (\ln(xy)+1)_y = \frac{1}{y}$

$f_{yx} = \left(\frac{x}{y}\right)_x = \frac{1}{y}$; $f_{yy} = \left(\frac{x}{y}\right)_y = -\frac{x}{y^2}$

Notiamo che in questo caso $f_{xy} = f_{yx}$. Vale in proposito

TEOREMA di SCHWARZ: Se le derivate parziali f_x, f_y sono continue in un intorno di $(\bar{x},\bar{y})$ e le derivate miste f_{xy}, f_{yx} sono continue in $(\bar{x},\bar{y})$ allora $f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = f_{yx}(\bar{x},\bar{y})$

Ma consideriamo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

. In ogni punto $(x,y)\neq(0,0)$ RISULTA:

$f_x(x,y) = 2\dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$; $f_y(x,y) = 2\dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2\dfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}$.

Ma in (0,0) - calcolando le derivate come lim. del rapp. increm. RISULTA:

$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{0}{h^2} = 0$; $f_y(0,0) = \ldots = 0$

$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0}\dfrac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\dfrac{-2k^5}{k^4\cdot k} = -2$; $f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{2h^5}{h^4 h} = 2$

Le derivate miste in (0,0) sono diverse!! Infatti la funz. $f_{xy}(x,y)$ non è continua in (0,0).

Ottimizzazione delle funzioni di 2 variabili

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(\bar{x},\bar{y})$ un punto interno ad E.
Esso si dice punto di massimo locale se esiste un cerchio con centro in $(\bar{x},\bar{y})$ e raggio $\delta > 0$, contenuto in E

$$B_\delta(\bar{x},\bar{y}) = \{(x,y) \in E \mid \sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2} < \delta\}$$

tale che per tutti gli $(x,y) \in B_\delta(\bar{x},\bar{y})$ si abbia (diversi da $(\bar{x},\bar{y})$)

$$f(x,y) \leq f(\bar{x},\bar{y})$$

Analogamente per il minimo locale.
Si dice che il massimo (o il minimo) è forte se vale $\lneq$ $(\gneq)$

Vale un analogo del teorema di Fermat (in 1 variabile):

TEOR. Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione con f_x, f_y continue in $(\bar{x},\bar{y})$, punto interno a E. Se in $(\bar{x},\bar{y})$ la f ha massimo locale (o minimo locale) allora il gradiente di f in $(\bar{x},\bar{y})$ è nullo.

La cosa è abbastanza logica, poiché mi aspetto che ci sia un piano tangente e mi aspetto che tale piano sia // xOy.
Il teorema precedente è una condizione necessaria: dice tra quali punti cercare gli estremi locali (qualora f sia differenziabile). I punti a gradiente nullo sono detti PUNTI CRITICI: tra essi bisogna distinguere i veri punti estremanti dai punti di sella. Allo scopo si possono guardare le derivate seconde: l'idea che c'è dietro è che si può migliorare l'approssimazione lineare di $f(x,y)$ usando un polinomio di 2° grado invece che di primo:

$$f(\bar{x}+h,\bar{y}+k) = f(\bar{x},\bar{y}) + f_x(\bar{x},\bar{y})h + f_y(\bar{x},\bar{y})k + f_{xx}(\bar{x},\bar{y})\frac{h^2}{2} + \left(f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) + f_{yx}(\bar{x},\bar{y})\right)\frac{hk}{2} + f_{yy}(\bar{x},\bar{y})\frac{k^2}{2} + o(h^2+k^2) \quad ???$$

Proviamo a capire che cosa succede quando $f(x,y)$ è proprio un polinomio di 2° grado

1. $f(x,y) = x^2+y^2$ ha minimo locale (e globale) in $(0,0)$

$f_x = 2x \Rightarrow f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 0$

$f_y = 2y \Rightarrow f_{yx} = f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = 2$

2. $f(x,y) = -(x^2+y^2)$ ha massimo locale (e globale) in $(0,0)$

$f_x = -2x \Rightarrow f_{xx} = -2 \quad f_{xy} = 0$

$f_y = -2y \Rightarrow f_{yx} = f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = -2$

3. $f(x,y) = x^2-y^2$ ha un punto di sella in $(0,0)$

$f_x = 2x \Rightarrow f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 0$

$f_y = -2y \Rightarrow f_{yx} = f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = -2$

È poi chiaro che se in questa funzione sostituisco $\begin{cases} x-y = \sqrt{2}\,u \\ x+y = \sqrt{2}\,v \end{cases}$ ottengo $g(u,v) = 2uv$ che ha grafico che è solo ruotato del precedente e quindi in $(0,0)$ ha ancora un punto di sella. In questo caso

$g_u = 2v \Rightarrow g_{uu} = 0 \quad g_{uv} = 2$

$g_v = 2u \Rightarrow g_{vu} = g_{uv} = 2 \quad g_{vv} = 0$

Si intuisce quindi che la cosa importante non è il segno della singola derivata seconda, c'è invece un dato che distingue i primi 2 casi dai secondi 2: nel caso 1 e nel caso 2

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} > 0\ ;$$

negli altri due casi il verso della disuguaglianza è opposto.
In effetti, denotato il determinante $\begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) \\ f_{yx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) \end{vmatrix}$ con $H_f(\bar{x},\bar{y})$ (Hessiano di f) si dimostra che

+15

TEOR. $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, dotata di derivate parziali 1^e e 2^e continue. Se $(\bar{x},\bar{y})$ è un punto critico per f (cioè se $(\mathrm{grad} f)(\bar{x},\bar{y})=(0,0)$)

i) se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) < 0$: $(\bar{x},\bar{y})$ non è un estremante

ii) se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) > 0$ e $\begin{cases} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) > 0 : (\bar{x},\bar{y}) \text{ è pto di min. locale forte} \\ f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) < 0 : (\bar{x},\bar{y}) \text{ '' '' MAX '' ''} \end{cases}$

(iii) se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) = 0$ si deve procedere ad un'analisi ulteriore.

Un punto critico non estremante viene spesso detto "di sella" anche se la funzione non presenta una vera sella. Vedi $f(x,y) = x^3$ nei punti $(0,y)$.

ESEMPIO SPINOSO

$f(x,y) = (y-x^2)(y-1)^2$. Il sist. $\begin{cases} f_x = -2x(y-1)^2 = 0 \\ f_y = (y-1)(3y-1-2x^2) = 0 \end{cases}$ dà i punti critici:

$(0, 1/3)$, $(x,1)$ con x variabile comunque in $\mathbb{R}$.

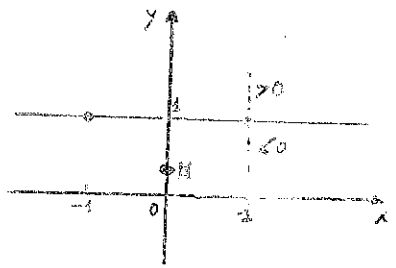
$f_{xx} = -2(y-1)^2$, $f_{xy} = f_{yx} = -4x(y-1)$, $f_{yy} = 6y-4-2x^2$

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{vmatrix} -2(y-1)^2 & -4x(y-1) \\ -4x(y-1) & 6y-4-2x^2 \end{vmatrix} = 4(y-1)^2(x^2-3y+2-4x^2)$$

$\Rightarrow \mathcal{H}_f(0, 1/3) = 4(1/3-1)^2(2-1) > 0$: punto estremante

$f_{xx}(0,1/3) = -2(2/3)^2 < 0 \Rightarrow$ MAX locale. VALORE $4/27$.

Invece $\mathcal{H}_f(x,1) = 0$. Quindi bisogna vedere che cosa succede in un intorno dei vari punti, tenuto conto che $f(x,1) = 0$.



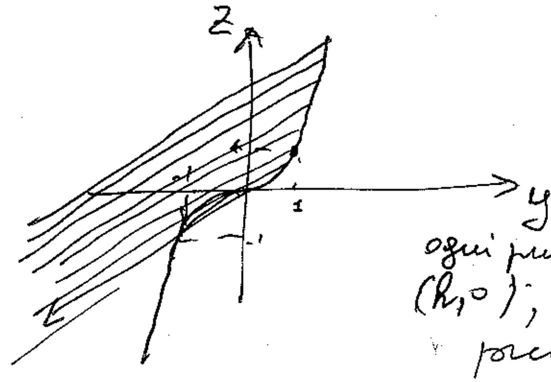
In $(1,1)$ si ha un punto di sella. Infatti $f(1,1+k) = k^2 \cdot k \begin{cases} >0 \text{ se } k>0 \\ <0 \text{ se } k<0 \end{cases}$

Idem in $(-1,1)$: $f(-1,1+k) = k^3 \dots$

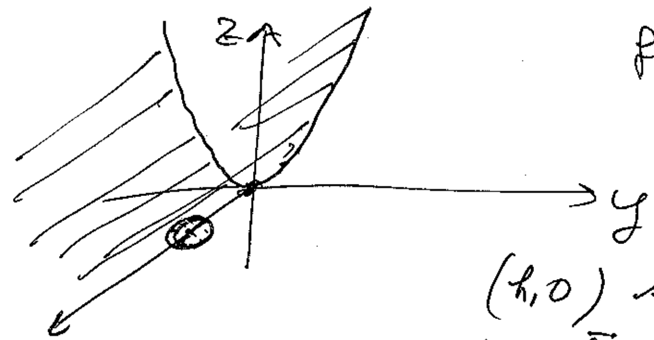
Se $|x|<1$ invece:

$f(x+h, 1+k) = k^2(1+k-(x+h)^2)$: se prendo h tale che $|h|$ sia abbastanza piccolo, $|x+h|<1$ e quindi $(x+h)^2<1$; allora se $k>0$ sicuramente $1+k-(x+h)^2>0$; ma anche se prendo $k<0$ ma tale che $k>(x+h)^2-1$ trovo valori positivi: c'è tutto un rettangolo in cui $f(x+h,1+k) \geq f(x,1)=0 \implies$ MINIMI LOCALI. Simmetricamente se $|x|>1$: MAX LOCALI

$f(x,y) = y^3$



ogni punto dell'asse x, $(h,0)$, è un punto di sella



$f(x,y) = y^2$

$(h,0)$ sono punti di minimo locale

$f(x,y) \geq f(h,0) \quad \forall (x,y) \in \mathcal{U}_\delta((h,0))$

Ma $f_x = 0$ $\quad f_{xx} = 0 \quad f_{xy} = 0$

$f_y = 2y \quad f_{yx} = 0 \quad f_{yy} = 2$

e quindi

$\mathcal{H}_f(h,0) = 0$ anche se $(f_x(h,0), f_y(h,0)) = (0,0)$

e anche se so che $(h,0)$ sono minimi locali.

ES

$f(x,y) = x^4 - 4x^2y^2 + y^4 + 5x^2 - y^2$ (11)

$f_x = 4x^3 - 8xy^2 + 10x$

$f_y = -8x^2y + 4y^3 - 2y$

Estremi locali?

$\operatorname{grad} f = \underline{0} \iff \begin{cases} 4x^3 - 8xy^2 + 10x = 0 \\ -8x^2y + 4y^3 - 2y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x(2x^2 - 4y^2 + 5) = 0 \\ -2y(4x^2 - 2y^2 + 1) = 0 \end{cases}$

1ª eq. si annulla se

$x = 0$ oppure $2x^2 - 4y^2 + 5 = 0$

2ª eq. si annulla se

$y = 0$ oppure $4x^2 - 2y^2 + 1 = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ SOL: $(0,0)$ $\quad \begin{cases} x = 0 \\ -2y^2 + 1 = 0 \end{cases}$ SOL: $(0, \pm 1/\sqrt{2})$ $\quad \begin{cases} 2x^2 \cancel{-4y^2} + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ SOL: $\emptyset$

$\begin{cases} 2x^2 - 4y^2 + 5 = 0 \\ 4x^2 - 2y^2 + 1 = 0 \end{cases}$ sistema lineare in x^2 e y^2

moltiplico x 2 la 1ª eq. e la sostituisco alla 2ª

$\begin{cases} 2x^2 - 4y^2 + 5 = 0 \\ 6y^2 - 9 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2} \\ y^2 = 3/2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3/2} \end{cases}$

Ho 7 punti critici (12)

$(0,0)$, $(0, \pm 1/\sqrt{2})$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

$f_{xx} = 12x^2 - 8y^2 + 10 \qquad f_{xy} = -16xy$

$f_{yx} = -16xy \qquad f_{yy} = -8x^2 + 12y^2 - 2$

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{vmatrix} 2(6x^2 - 4y^2 + 5) & 2(-8xy) \\ 2(-8xy) & 2(-4x^2 + 6y^2 - 1) \end{vmatrix} =$$

$= 4\left[(6x^2 - 4y^2 + 5)(-4x^2 + 6y^2 - 1) - 64x^2y^2\right]$

$\mathcal{H}_f(0,0) = 4 \cdot 5 \cdot (-1) < 0 \Rightarrow$ sella.

$\mathcal{H}_f(0, \pm 1/\sqrt{2}) = 4\left[(-4 \cdot \frac{1}{2} + 5)(+6 \cdot \frac{1}{2} - 1) - 0\right] =$

$= 4 \cdot 3 \cdot 2 > 0$ estremante locale

$f_{xx}(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2(6 \cdot 0 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 5) = 2 \cdot 3 > 0$

abbiamo 2 punti di minimo locale.

$\mathcal{H}_f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm\sqrt{3/2}) = 4\left[(3 - 6 + 5)(-2 + 9 - 1) - \overset{16}{\cancel{64}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}}\right]$

$= 4(2 \cdot 6 - 48) < 0$ punti di sella