Conclusione ultimo esercizio di venerdì (1

da

$$\ln \frac{x-a}{x-b} = (a-b)kt + \ln \frac{a}{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x-a}{x-b} = e^{(a-b)kt + \ln \frac{a}{b}}$$

$$x-a = e^{\ln \frac{a}{b}} \cdot e^{(a-b)kt} \cdot (x-b)$$

$$x-a = \frac{a}{b} e^{(a-b)kt} \cdot (x-b)$$

$$x(t) = \frac{\cancel{\frac{a}{b}}\; a - a e^{(a-b)kt}}{1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)kt}}$$

$$\boxed{x(t) = ab \frac{1 - e^{(a-b)kt}}{b - a e^{(a-b)kt}}}$$

L'eq. di Verhulst è un'aggiustamento della più celebre (anche se meno adeguata) equazione di MALTHUS (1798):

(*) $$N'(t) = \varepsilon N(t)$$

che si ottiene osservando che (se trascuro la capacità dell'ambiente) la funzione $(\lambda-\mu)N(t)$ esprime l'incremento – o la diminuzione – di popolazione nell'unità di tempo, cioè

$$(\lambda-\mu)N(t) = \frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$$

e facendo tendere a 0 il Δt.

Un'eq. come la (*) viene detta eq. diff. LINEARE del 1° ordine OMOGENEA.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL 1° ORDINE

In generale parlo di eq. diff. LINEARE del 1° ordine quando nell'equazione che lega $y(t)$ e $y'(t)$ queste due funzioni compaiono con grado 1: dunque quando hanno la forma

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = f(t)$$ con $a(t)$ e $f(t)$ continue su $I \subset \mathbb{R}$

Se $f(t)=0$ si parla di EQUAZIONE OMOGENEA

Altrimenti " " " COMPLETA.

TEOREMA: L'integrale generale dell'equazione completa

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = f(t)$$

si ottiene aggiungendo all'integrale generale della omogenea associata

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = 0$$

una soluzione particolare di quella completa

STESSA SITUAZIONE CHE NEI SISTEMI LINEARI

(*) $y' = -a(t)y + f(t)$

1) mostro che se $z(t)$ è una soluzione di

$y' = -a(t)y$ e $\bar{y}(t)$ è una sol. di (*)

allora

$$z(t) + \bar{y}(t)$$

è una soluz. di (*)

Per ipotesi so che $\forall t \in I:\ z'(t) = -a(t)z(t)$

e $\forall t \in I:\ \bar{y}'(t) = -a(t)\bar{y}(t) + f(t)$

Considero $z(t) + \bar{y}(t)$

ha derivata $z'(t) + \bar{y}'(t)$ e sommando:

$$z'(t) + \bar{y}'(t) = -a(t)(z(t) + \bar{y}(t)) + f(t)$$

quindi $z(t) + \bar{y}(t)$ soddisfa l'eq (*) $\forall t \in I$.

2) mostro che se $\bar{y}(t)$ e $\varphi(t)$ sono due soluzioni di (*) allora

$\bar{y}(t) - \varphi(t)$ è soluz. di $y'(t) = -a(t)y(t)$

Per ipotesi

$\bar{y}'(t) = -a(t)\bar{y}(t) + f(t) \quad \forall t \in I$

$\varphi'(t) = -a(t)\varphi(t) + f(t) \quad \forall t \in I$

$$(\bar{y}(t) - \varphi(t))' = \bar{y}'(t) - \varphi'(t) = -a(t)(\bar{y}(t) - \varphi(t))$$

$\forall t \in I \implies \bar{y}(t) - \varphi(t)$ soddisfa l'eq. omogenea

Soluzione dell'equazione omogenea

$y'(t) = -a(t)\, y(t)$ è un'equazione a variabili separabili!

Ha una soluzione costante: $y(t) = 0$

mentre se $y(t) \not\equiv 0$ si ha

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(t)\,dt \qquad \text{cioè} \qquad \ln|y| = -A(t) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

($A(t)$ primitiva di $a(t)$)

cioè $\boxed{y = \pm e^{k} \cdot e^{-A(t)}}$ cioè $y = c\, e^{-A(t)}$ con $c \neq 0$.

VEDI PAG 5

Dando a c la possibilità di annullarsi, si rappresenta anche la soluzione costante. Quindi l'integrale generale è

$$y(t) = c\, e^{-A(t)} \qquad c \in \mathbb{R}$$

ES. Le soluzioni dell'equazione di Malthus hanno la forma $N(t) = c\, e^{\varepsilon t}$ .... CRESCITA o DECADIMENTO ESPONENZIALE.

Ricerca di una soluzione particolare

Usiamo il metodo DELLA VARIAZIONE DELLA COSTANTE, cioè cerchiamo la soluzione tra le funzioni della forma

$$\bar{y}(t) = c(t)\, e^{-A(t)}$$

ove $c(t)$ non è più costante.

$\bar{y}'(t) = \left(c'(t) - c(t)\,a(t)\right) e^{-A(t)}$; quindi sostituendo nell'eq. differenziale COMPLETA devo avere

$$\left(c'(t) - c(t)\,a(t)\right) e^{-A(t)} + a(t)\,c(t)\,e^{-A(t)} = f(t) \qquad \text{cioè}$$

$$c'(t)\, e^{-A(t)} = f(t) \qquad \text{o anche} \qquad c'(t) = f(t)\, e^{A(t)}$$

$\Rightarrow$ $c(t)$ è una primitiva $G(t)$ di $f(t)\, e^{A(t)}$

$\Rightarrow$ $\bar{y}(t) = G(t)\, e^{-A(t)}$

$\ln|y| = -A(t) + k$

Spiegazioni dei passaggi nell'eq. diff. lineare omogenea

$e^{\ln|y|} = e^{-A(t)+k}$

$|y| = e^k \cdot e^{-A(t)}$

$y = \pm e^k e^{-A(t)}$

$e^k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

$-e^k < 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

$\pm e^k = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y(t) = c\, e^{-A(t)}$

$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$A(t)$ è una primitiva di $a(t)$

Ma c'è anche la soluzione $y(t) = 0$ che posso pensare come $0 \cdot e^{-A(t)}$

$\Rightarrow$ le soluz. dell'eq. omogenea sono TUTTE e SOLE quelle della forma

$y(t) = c\, e^{-A(t)}$ $\quad \boxed{c \in \mathbb{R}}$

$A(t)$ prim. di $a(t)$ per $t \in I$.

Esempio

$y' = -ay$ $\quad a \in \mathbb{R}$: la soluz. è

$\boxed{y(t) = c\, e^{-at}}$

Dunque l'integrale generale di

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = f(t)$$

ha la forma

$$y(t) = \left(c + G(t)\right) e^{-A(t)}$$

ove: c varia comunque nei numeri reali

$A(t)$ è una primitiva (fissata) di $a(t)$

$G(t)$ è " " " di $f(t)\,e^{A(t)}$

Se voglio risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)\,y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

basta imporre: $y(t_0) = \left(c + G(t_0)\right) e^{-A(t_0)} = y_0$, cioè

porre : $c = y_0\, e^{A(t_0)} - G(t_0)$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \Big(y_0\, e^{A(t_0)} + \underbrace{G(t) - G(t_0)}_{\int_{t_0}^{t} f(s)\, e^{A(s)}\, ds} \Big) e^{-A(t)}$$

scegliendo $A(t)$ in modo che $A(t_0) = 0$ (cioè $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$)

si perviene alla formula

$$y(t) = y_0\, e^{-A(t)} + \left(\int_{t_0}^{t} f(s)\, e^{A(s)}\, ds \right) e^{-A(t)}$$

in cui la soluzione particolare è vista come somma della soluzione dell'omogenea associata che passa per (t_0, y_0) e di una soluzione particolare passante per $(t_0, 0)$.

Es. $a(t) = a$ costante > 0 : $y'(t) + a\,y(t) = f(t)$

Sol. omog. associata : $y(t) = c\, e^{-at}$

Integrale generale : $y(t) = \left(c + \int f(t)\, e^{at}\, dt\right) e^{-at}$

Sol.$_{\text{e}}$ del problema di Cauchy con $y(0) = y_0$:

$$y(t) = y_0\, e^{-at} + \left(\int_0^t f(s)\, e^{at}\, ds \right) e^{-at}$$

$$= y_0\, e^{-at} + \boxed{\int_0^t e^{-a(t-s)} f(s)\, ds} \longrightarrow \text{REGIME PERMANENTE}$$

Non sempre serve il metodo di variazione delle costanti.
Ad es. quando il coeff. di $y(t)$ è una funzione costante, si può cercare le soluzioni tra funzioni "che somigliano a $f(t)$"

e $f(t)$ è una funz elementare abbastanza semplice

ES.

$$y' + 5y = 2t^2 - t - 1 \qquad (f(t) \text{ POLINOMIO})$$

soluzione dell'omogenea associata $y'+5y=0$:

$$\boxed{y(t) = c\, e^{-5t}}$$

soluzione particolare della completa:
lo cerco tra i polinomi di 2° grado,

perchè $f(t)$ è pol. di 2° grado

$$\bar{y}(t) = a t^2 + bt + c$$

$$\bar{y}' = 2at + b$$

impongo che sia una soluzione

$$2at + b + 5(at^2 + bt + c) = 2t^2 - t - 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(5a-2)t^2 + (2a+5b+1)t + b + 5c + 1 = 0$$

$$\begin{cases} 5a - 2 = 0 \\ 2a + 5b + 1 = 0 \\ b + 5c + 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2/5 \\ b = -9/25 \\ c = -16/125 \end{cases}$$

$$\boxed{\bar{y}(t) = \frac{2}{5}t^2 - \frac{9}{25}t - \frac{16}{125}}$$ è la sol. part. cercata

L'integrale gener. dell'eq. completa è

$$y(t) = c\,e^{-5t} + \frac{2}{5}t^2 - \frac{9}{25}t - \frac{16}{125}$$

$y' + y = -\cos 2t$ ($f(t)$ funzione SENO o COSENO)

eq. diff 1°ord. lineare, con coeff. costante

1°) Soluzione dell'eq. omog. associata : $y(t) = c e^{-t}$

2°) Sol. particolare della completa.

se: $\bar{y}(t) = c\cos 2t \quad \Rightarrow \bar{y}'(t) = -2c\,\text{sen}\,2t$

$\Rightarrow \quad -2c\,\text{sen}\,2t + c\cos 2t = -\cos 2t$

$-2c\,\text{sen}\,2t + (c+1)\cos 2t \equiv 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

così non va!

Proviamo con $\bar{y}(t) = a\cos 2t + b\,\text{sen}\,2t \quad (a, b \in \mathbb{R})$

$\bar{y}'(t) = -2a\,\text{sen}\,2t + 2b\cos 2t$

Sostituisco

$-2a\,\text{sen}\,2t + 2b\cos 2t + a\cos 2t + b\,\text{sen}\,2t = -\cos 2t$

$(b-2a)\,\text{sen}\,2t + (2b+a+1)\cos 2t = 0$

$$\begin{cases} b-2a=0 \\ 2b+a+1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=2a \\ 5a+1=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} b=-2/5 \\ a=-1/5 \end{matrix}$$

L'integrale generale è di conseguenza

$$y(t) = c e^{-t} - \frac{1}{5}\cos 2t - \frac{2}{5}\,\text{sen}\,2t$$

$y' - y = 2e^{-3t}$ ($f(t)$ funzione esponenziale)

eq. diff. lin. 1° ordine. coeff. costanti complete

1) sol. omog. associata : $y(t) = ce^{t}$

2) calcolo di una sol. particolare:

$\bar{y}(t) = ce^{-3t}$

$\bar{y}'(t) = -3ce^{-3t}$

$-3c\cancel{e^{-3t}} - c\cancel{e^{-3t}} = 2\cancel{e^{-3t}}$

$-4c = 2 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$

Integrale generale: $y(t) = ce^{t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$

Ma attenzione l'eq.

$y' + 3y = 2e^{-3t}$ ha int. gen.: $\boxed{y(t) = ce^{-3t} + 2te^{-3t}}$ integrale gen.!

Infatti

1) omog. ass : $y(t) = ce^{-3t}$

2) $\bar{y}(t) = ke^{-3t}$ non può essere soluzione della eq. completa perché per (1) è sol. dell'omogenea

provo con $\bar{y}(t) = (a+bt)e^{-3t}$

$\bar{y}'(t) = be^{-3t} - 3(a+bt)e^{-3t} = (b-3a-3bt)e^{-3t}$

$(b-\cancel{3a}-\cancel{3bt})e^{-3t} + \cancel{3(a+bt)}e^{-3t} = 2e^{-3t}$

$be^{-3t} = 2e^{-3t} \Rightarrow b=2$ a = qque in part. posso prendere $a=0$