Es 2 EQUAZIONE LOGISTICA: $y' = ay(1-by)$ con a, b costanti >0

In questo caso $a(t) = a$ $\quad b(y) = y(1-by)$

$\Rightarrow$ soluzioni costanti : $y=0 \quad y = \frac{1}{b}$

Ponendosi in uno degli intervalli $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, 1/b)$ $J_2 = (1/b, +\infty)$ si passa a

$$\int \frac{dy}{y(1-by)} = \int a\,dt \qquad \text{RICORDARE: } \frac{1}{y(1-by)} = \frac{1}{y} + \frac{b}{1-by}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\left|\frac{y}{1-by}\right| = at + c \iff \left|\frac{y}{1-by}\right| = e^{at+c} \iff$$

$$\frac{y}{1-by} = \pm\, e^c \cdot e^{at}$$

e ponendo $k = \pm e^c$, cioè k costante arbitraria non nulla:

$$\frac{y}{1-by} = k\,e^{at}$$

, cioè risolvendo rispetto a y

$$y(t) = \frac{k\,e^{at}}{1+bke^{at}}.$$

NOTA: visto che $b(y)$ è un polinomio (e quindi derivabile con derivata prima continua), il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ay(1-by) \\ y'(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è risolubile.

cioè, per ogni punto (t_0, y_0) di $\mathbb{R}^2$ passa una e una sola CURVA INTEGRALE (grafico di una soluzione particolare).

Studiamo le curve integrali di un'equazione logistica particolare $a=1,\ b=\frac{1}{2}$ (per vedere come vanno)

Esercizio : risolvere $\begin{cases} y' = y\left(1-\frac{1}{2}y\right) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (2)

1) esame delle eq. diff.: è a var. sep.

$b(y) = y\left(1-\frac{1}{2}y\right) \qquad a(t)=1$

queste funzioni sono entrambe cont. su $\mathbb{R}$

$b_y(y)$ continua su $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ probl. di Cauchy ha 1 e 1 sola soluzione

2) $b(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y=0$ e $y=2$ sono due soluzioni delle eq. diff.
Nessuna è sol. del probl. di Cauchy.

3) separo le variabili

$$\int \frac{dy}{y\left(1-\frac{1}{2}y\right)} = \int dt$$

$$\frac{1}{y\left(1-\frac{1}{2}y\right)} = \frac{2}{y(2-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-2} \Rightarrow$$

$$-2 = A(y-2) + By \Rightarrow (A+B)y - 2A + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases} : \quad \frac{1}{y} - \frac{1}{y-2}$$

$$\int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-2}\right)dy = t + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

$\ln\left|\frac{y}{y-2}\right| = t+k$ INTEGRALE GENERALE IN FORMA IMPLICITA

$\ln\left|\frac{1}{1-2}\right| = 0 + k \qquad$ poiché $y(0) = 1$

$\Rightarrow \ln\left|\dfrac{y}{y-2}\right| = t$ Devo decidere a che cosa corrisponde il valore ass. poiché c'è 1 sola soluz. del probl. di Cauchy

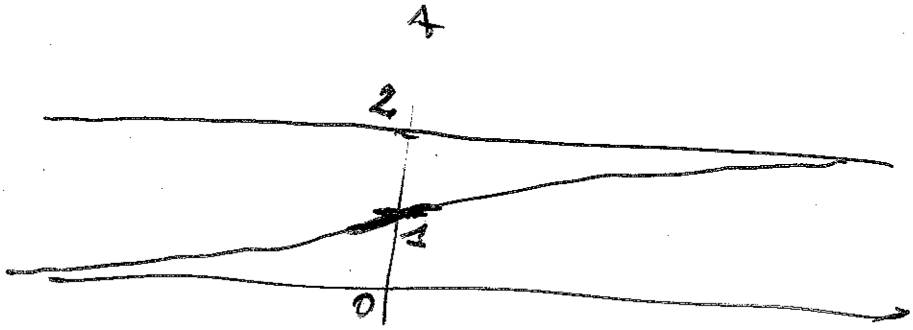
y può variare in $(-\infty,0)$ o in $(0,2)$ o in $(2,+\infty)$. Se ho chiesto $y(0)=1$ dove varia y? $\Rightarrow$ la sol. del probl. di Cauchy deve variare in $(0,2)$ $\Rightarrow$

$$\ln\left(\frac{y}{2-y}\right) = t$$

soluz. in forma implicita del probl. di Cauchy

$$\frac{y}{2-y} = e^t \Rightarrow y = e^t(2-y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(1+e^t) = 2e^t \Rightarrow y = \frac{2e^t}{1+e^t}$$

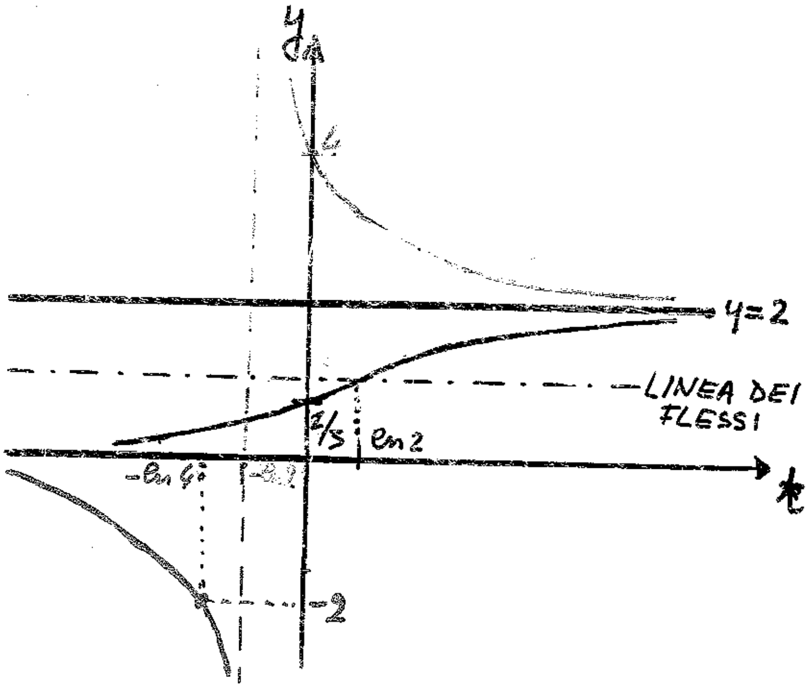


Quanto vale il coeff. ang. della tangente al grafico della soluz. in $(0,1)$?

$y' = y\left(1-\frac{1}{2}y\right) \Rightarrow y'(0) = y(0)\left(1-\frac{1}{2}y(0)\right) = \frac{1}{2}$

per questa soluzione:

$y'' = y' - yy' = y'(1-y) = y\left(1-\frac{1}{2}y\right)(1-y) > 0 \Leftrightarrow 1-y>0$



$y(0) = 2/3 \Rightarrow$

$2k = 2/3\,(k+2) \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 1 \Rightarrow$

flesso: $(\ln 2, 1)$

$y(0) = 4 \Rightarrow$

$2k = 4\,(k+2) \Rightarrow k = -4$

$\Rightarrow$ definita in $(-\ln 2, +\infty)$

$y(-\ln 4) = -2 \Rightarrow 2k = -2(2e^{\ln 4} + k) \Rightarrow -k = e^{\ln 4} = 4\ :\ k = -4$

Ma questa soluzione è definita (e derivabile) in $(-\infty, -\ln 2)$

In sostanza: per ogni punto dei due semipiani $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 2\}$ e $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$ passa una soluzione particolare, che però NON È DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$, ma solo su una semiretta.

Invece le soluzioni che passano per un punto della fascia $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2\}$ sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Un esempio di equazione logistica è dovuta a Verhulst (18..) e fornisce un modello per la dinamica delle popolazioni:

$$N'(t) = \varepsilon\, N(t)\left(1 - \frac{1}{C} N(t)\right)$$

ove $N(t)$ = numero di individui al tempo t di una popolazione isolata

$\varepsilon = \lambda - \mu$: potenziale biologico

λ : tasso di fertilità (= numero di nuovi nati per individuo nell'unità di tempo)

μ : tasso di mortalità (= numero di morti per individuo nell'unità di tempo)

C = capacità dell'ambiente.

Imponendo la condizione iniziale $N(0) = N_0 > 0$ si determina l'andamento della popolazione. Soluzioni di EQUILIBRIO: $N(t) = 0$, $N(t) = C$

ES.

$$\begin{cases} y' + y \cot t = 2\cos t \\ y(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

1) Riconoscimento: eq. diff. del 1° ordine, lineare completa.

Dove sono continui i coefficienti $\cot t$ e $\cos t$?

$\cos t$: $\forall t \in \mathbb{R}$; $\cot t = \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$ $\quad t \neq k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}$ è l'I.D.

e quindi $\cot t$ è continua su ogni intervallo della forma $(k\pi, (k+1)\pi)$

Le soluzioni dell'eq. differenziale sono definite ciascuna su singoli intervalli in dipendenza dalla condizione iniziale. Nel problema proposto la cond. iniziale è $y(\pi/2)=0$ $\Rightarrow$ dato che $\pi/2 \in (0,\pi)$ la soluzione sarà definita in questo intervallo.

2) Soluzione della lineare omogenea associata:

$y' = -\dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\, y$ $\quad\Rightarrow\quad$ a parte la sol $y(t)=0$, separo le variabili

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\, dt \Rightarrow \ln|y| = -\ln|\operatorname{sen} t| + c$

$\Rightarrow |y| = \dfrac{e^c}{|\operatorname{sen} t|} \quad\Rightarrow\quad y = \dfrac{\pm e^c}{\operatorname{sen} t}$ $\qquad \pm e^c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sostituisco $k \in \mathbb{R}$

$y(t) = \dfrac{k}{\operatorname{sen} t} \qquad k \in \mathbb{R}$ (e per il pb. di Cauchy $t \in (0,\pi)$)

3) ricerca della soluzione particolare dell'eq. complet.

$$y' + y\,\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = 2\cos t$$

applico il metodo di variazione delle cost.
Suppongo che ~~una~~ soluz. particolare abbia la forma

$$\bar{y}(t) = \frac{k(t)}{\operatorname{sen} t}$$

$$\bar{y}'(t) = \frac{k'(t)\operatorname{sen} t - k(t)\cos t}{(\operatorname{sen} t)^2}$$

$$\left(\frac{k'(t)}{\operatorname{sen} t} - \cancel{\frac{k(t)}{\operatorname{sen} t}\cdot\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}}\right) + \cancel{\frac{k(t)}{\operatorname{sen}(t)}\cdot\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}} = 2\cos t$$

$$k'(t) = 2\operatorname{sen} t\cos t$$

$$k(t) = \operatorname{sen}^2 t$$

Se non si vede a occhio:
$\frac{d}{dt}\operatorname{sen} t = \cos t$. Sostituisco
$s = \operatorname{sen} t$, $ds = \cos t\,dt$ $\Rightarrow \int 2\operatorname{sen} t\cos t\,dt = \int 2s\,ds$

una sol. particolare è $\bar{y}(t) = \operatorname{sen}^2 t \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} t}$

$\Rightarrow$ integrale generale

$$y(t) = \operatorname{sen} t + \frac{k}{\operatorname{sen} t}$$

ma $y(\pi/2) = 0$ $\qquad 0 = 1 + \frac{k}{1}$

$\Rightarrow$ sol. pr. Cauchy: $y(t) = \operatorname{sen} t - \frac{1}{\operatorname{sen} t}$
con dominio $(0,\pi)$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 2° ORDINE

Hanno la forma $F(t, y(t), y'(t), y''(t)) = 0$.
Ogni funzione $\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due volte derivabile in I e tale che

$$\forall t \in I: \quad F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)) = 0$$

si dice soluzione dell'eq. diff. di 2° ordine

Si prova che l'integrale generale di un'eq. diff. del 2° ordine è costituito da una FAMIGLIA di funzioni dipendente da 2 parametri $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Questo è il motivo per cui per risolvere il problema di Cauchy dovremo dare 2 condizioni iniziali (VEDI il caso dell'eq. che coinvolge l'accelerazione in cui si danno spostamento e velocità iniziali).

In particolare si dicono EQ. DIFF. LINEARI del 2° ORDINE quelle della forma

$$(1) \qquad y''(t) + a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = f(t)$$

con $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ continue su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$.
Anche in questo caso, l'integrale generale dell'equazione diff. completa si ottiene sommando una soluzione particolare di (1) all'integrale generale dell'eq. diffle. OMOGENEA ASSOCIATA

$$(2) \qquad y''(t) + a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = 0$$

Non ci sono però formule generali "belle" come nel caso del 1° ordine.

Fatti:

1) se $z_1(t)$ e $z_2(t)$ sono soluz. dell'equazione omog. anche $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lo è. VEDI PAG 9

2) se queste due soluzioni sono tali che $\boxed{\forall t \in I}$

WRONSKIANO →
$$\begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

allora le soluzioni dell'EQ. OMOGENEA sono (tutte e) sole quelle del tipo $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Caso particolare: $a(t) = a$ $b(t) = b$ COSTANTI

L'equazione
$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0$$
ha qualche soluzione della forma e^{rt} (come succede nel caso delle lineari di 1º ordine)?

$$\left.\begin{array}{l} y(t) = e^{rt} \\ y'(t) = r e^{rt} \\ y''(t) = r^2 e^{rt} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ la $y(t)$ è soluzione se e solo se $(r^2 + ar + b) e^{rt} = 0$ cioè se e solo se

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$$: equazione caratteristica dell'eq. differenziale

- Se $\Delta = a^2 - 4b > 0$, ci sono due radici reali distinte r_1, r_2

$z_1(t) = e^{r_1 t}$ e $z_2(t) = e^{r_2 t}$ sono tali che $\begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} \neq 0$ comunque si scelga t ⇒ le soluzioni sono tutte e sole del tipo $c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$.

Ad es. $y''(t) - k^2 y(t) = 0$ con $k \neq 0$ ha associata l'equazione $r^2 - k^2 = 0$ che ha le radici $r = \pm k$. Allora l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea è

$$c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}$$

z_i è soluz. dell' eq. diff.

$$y'' + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad z_i'' + a(t)\,z_i' + b(t)\,z_i \equiv 0 \qquad \forall t \in I \text{ ove}$$

z_i è definita e derivabile 2 volte.

Considero:

$c_1 z_1 + c_2 z_2$. Si ha:

$(c_1 z_1 + c_2 z_2)' = c_1 z_1' + c_2 z_2'$

$(c_1 z_1 + c_2 z_2)'' = c_1 z_1'' + c_2 z_2''$ e quindi

$$(c_1 z_1'' + c_2 z_2'') + a(t)(c_1 z_1' + c_2 z_2') + b(t)(c_1 z_1 + c_2 z_2) \equiv 0 \quad \forall t \in I$$

VEDI PAG 11

$$r^2 + ar + b = 0 \qquad r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$$

se $a^2 - 4b < 0$ lo rappresento come $-(4b - a^2)$ e rappresento $\sqrt{a^2-4b} = \sqrt{4b-a^2} \cdot \sqrt{-1}$ $\quad \boxed{\sqrt{-1} = i}$

$$r = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} \cdot i$$

. Chiamo:

$$\alpha = -\frac{a}{2} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$$

Posso mostrare che soluzioni particolari dell'eq. differenz. lin. del 2° ordine omog. con Δ dell'eq. caratt. < 0 sono del tipo

$$z_1 = \underline{e^{\alpha t}\cos\beta t} \quad e \quad z_2 = \underline{e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t}$$

Infatti:

$$z_1' = \alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t = e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta\operatorname{sen}\beta t)$$

$$z_1'' = \alpha e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta\operatorname{sen}\beta t) + e^{\alpha t}(-\alpha\beta\operatorname{sen}\beta t - \beta^2\cos\beta t)$$
$$= e^{\alpha t}\left((\alpha^2-\beta^2)\cos\beta t - 2\alpha\beta\operatorname{sen}\beta t\right)$$

$$e^{\alpha t}\left((\alpha^2-\beta^2)\cos\beta t - 2\alpha\beta\operatorname{sen}\beta t\right) +$$
$$a e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta\operatorname{sen}\beta t) + b e^{\alpha t}\cos\beta t \overset{?}{\equiv} 0$$

$e^{\alpha t} \neq 0 \Rightarrow$

$$(\alpha^2-\beta^2)\cos\beta t - 2\alpha\beta\operatorname{sen}\beta t +$$
$$+ a\alpha\cos\beta t - a\beta\operatorname{sen} t +$$
$$+ b\cos\beta t \overset{?}{\equiv} 0$$

$$\iff \begin{cases} \alpha^2-\beta^2+a\alpha+b=0 \\ 2\alpha\beta+a\beta=0 \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} \neq 0 \qquad \alpha^2-\beta^2 = \frac{a^2}{4} - b + \frac{a^2}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{a^2}{2} - b - \frac{a^2}{2} + b \equiv 0 \\ 2\left(-\frac{a}{2}\right) + a \equiv 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Sì}}$

Per l'altra si procede nello stesso modo.

$\Rightarrow$ Soluzione generale se $\Delta < 0$

$$e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2\operatorname{sen}\beta t)$$

- se $\Delta = a^2 - 4b < 0$ ci sono due radici complesse coniugate $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. Allora

$e^{r_1 t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t)$; $e^{r_2 t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t)$

sono due soluzioni complesse dell'equazione differ. omogenea .... Se le voglio reali basta prendere

$$\frac{1}{2}\left(e^{r_1 t} + e^{r_2 t}\right) = e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{e} \quad \frac{1}{2i}\left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\right) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$$

VERIFICA per la prima soluzione:

se $z(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$

$z'(t) = e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta\operatorname{sen}\beta t)$

$z''(t) = e^{\alpha t}(\alpha^2\cos\beta t - \alpha\beta\operatorname{sen}\beta t - \alpha\beta\operatorname{sen}\beta t - \beta^2\cos\beta t)$

$$z''(t) + a z'(t) + b z(t) = e^{\alpha t}\Big(\underbrace{(\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b)}_{=0}\cos\beta t - \underbrace{(2\alpha\beta + a\beta)}_{=0}\operatorname{sen}\beta t\Big) = 0$$

infatti per ipotesi $(\alpha + i\beta)^2 + a(\alpha + i\beta) + b = 0$ ← calcolo Re e Im

Anche qui $\begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \\ e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta\operatorname{sen}\beta t) & e^{\alpha t}(\alpha\operatorname{sen}\beta t + \beta\cos\beta t) \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha t} \neq 0 \ \forall t.$

Dunque l'integrale generale avrà la forma:

$$c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t.$$

Da notare che posso leggere $\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$ e $\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$ come coseno e seno di un angolo φ e posto $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ mi riconduco a

$$e^{\alpha t} A\cos(\beta t - \varphi) \qquad A, \varphi \text{ qualsiasi}$$

Ad. es. $y''(t) + k^2 y(t) = 0$ ha associata l'equazione $r^2 + k^2 = 0$ cioè $r = \pm k i$: dunque l'integrale generale ha la forma $c_1\cos kt + c_2\operatorname{sen} kt$ o anche

$$A\cos(kt - \varphi)$$

- se $\Delta = a^2 - 4b = 0$ c'è un'unica radice (doppia) per $\boxed{z^2+az+b=0}$ $\to b=\frac{a^2}{4}$

  $z = -a/2$. Allora una soluzione è $e^{-\left(\frac{a}{2}\right)t}$.

  Per trovare un'altra sol. indipendente da questa:

  METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI.

  Cerco $z(t) = c(t)\, e^{-a/2\, t}$ che sia soluzione:

$$z'(t) = \left(c'(t) - \frac{a}{2} c(t)\right) e^{-a/2\, t}$$

$$z''(t) = \left(c''(t) - \frac{a}{2} c'(t) - \frac{a}{2} c'(t) + \frac{a^2}{4} c(t)\right) e^{-a/2\, t}$$

  e quindi sostituendo nell'eq. diff.:

$$\left(\boxed{c''(t) - a\cancel{c'(t)} + \frac{a^2}{4}\cancel{c(t)}} + a\cancel{c'(t)} - \frac{a^2}{2}\cancel{c(t)} \boxed{+\frac{a^2}{4}\cancel{c(t)}}\right) e^{-a/2\, t} = 0$$

  cioè

$$c''(t) = 0$$

$$c'(t) = c_1$$

$$c(t) = c_1 t + c_2$$

  Quindi una seconda soluzione indipendente(*) da $e^{-a/2\, t}$ è $t e^{-a/2\, t}$ e l'integrale generale è

$$(c_1 t + c_2)\, e^{-a/2\, t}$$

(*) (Verifico che anche le due soluzioni $te^{-a/2\, t}$ e $e^{-a/2\, t}$ sono indipendenti:
$$\begin{vmatrix} te^{-a/2\, t} & e^{-a/2\, t} \\ (1 - a/2\, t)\, e^{-a/2\, t} & -\frac{a}{2} e^{-a/2\, t} \end{vmatrix} = -e^{-at} \neq 0 \;\forall t\text{)}$$

Ricerca delle soluzioni particolari dell'equazione completa

Si può sempre cercare di usare il metodo di variazioni delle costanti. Ma quando $f(t)$ ha una forma che ricorda quella delle possibili soluzioni dell'omogenea:

polinomio ; $e^{\lambda t}$; $e^{\lambda t}\cos\omega t$ oppure $e^{\lambda t}\operatorname{sen}\omega t$

si può far di meglio.