Esercizio



$$y' + ty - t = 0 \qquad y' = t(1-y)$$
$$y' + ty = t$$

Eq diff. del 1° ordine, a variab. separabili, lineare completa.

è uno dei pochi casi in cui si possono fare entrambe le affermazioni

$$z(t) = y(t) - 1$$
$$z'(t) = y'(t) \quad \Longrightarrow \quad z' + tz = 0$$

La risolvo come a variab. separabili

$a(t) = t$ pol. continua su $\mathbb{R}$

$b(y) = 1 - y$ " " con $b'(y)$ continua su $\mathbb{R}$

una soluzione è $y(t) = 1$

le altre si trovano per separazione

$$\int \frac{dy}{1-y} = \int t\,dt$$

$$-\ln|y-1| = \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow \ln|y-1| = -\frac{t^2}{2} - c$$

$$\Rightarrow |y-1| = e^{-c} \cdot e^{-t^2/2}$$

$$\Rightarrow y - 1 = \pm e^{-c} e^{-t^2/2}$$

Solu. è $y - 1 = k e^{-t^2/2} \Rightarrow y = 1 + k e^{-t^2/2}$



Eq. diff. del 2° ordine lineari a coeff costanti

$$(*) \qquad y'' + ay' + by = f(t)$$

$f(t)$ continua su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$

$a, b$ costanti

Per risolverla devo sommare una sol. particolare dell'equazione completa $(*)$ con le soluzioni dell'omogenea associata:

$$z'' + az' + bz = 0$$

associamo l'eq. caratteristica

$$r^2 + ar + b = 0$$

$\Delta > 0$ : 2 sol. reali distinte $r_1, r_2$ e tutte le sol dell'omogenea hanno la forma

$$z(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\Delta < 0$ : $r_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2} \in \mathbb{C}$ con $\Delta = a^2 - 4b$

$$= \underbrace{-\frac{a}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}_{\beta}\sqrt{-1} = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$$

$$z(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos\beta t + c_2 \operatorname{sen}\beta t)$$

$\Delta = 0$ : 1 sola sol. reale : $r = -\frac{a}{2}$

$$z(t) = c_1 e^{-\frac{a}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{a}{2}t} =$$
$$= e^{-\frac{a}{2}t}(c_1 + c_2 t)$$

Per trovare una sol. della completa la cerco tra funzioni "SIMILI" al termine noto

1) $f(t)$ polinomio di grado $n$

cerco la soluz. nei polinomi

- di grado $n$ : $\bar{y}(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots a_2 t^2 + a_1 t + a_0$

  solo se $b \neq 0$

- di grado $n+1$ : se $b=0$ e $a \neq 0$
- di grado $n+2$ : se $b=0=a$

in questi due casi l'eq. diff. ha forma

$y'' + ay' = f(t)$ $\longrightarrow$ sost. $x(t)=y'(t)$, $x'(t)=y''(t)$

$y'' = f(t)$ $\longrightarrow$ calcolo successivamente due primitive

2) $f(t) = A e^{\lambda t} \cos \omega t$ oppure $f(t) = A e^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t$

$\boxed{\omega = 0}$ : $A e^{\lambda t}$

$\boxed{\lambda = 0}$ : $A \cos \omega t$

$\boxed{\lambda = 0}$ : $A \operatorname{sen} \omega t$

3) $f(t)$ = Somma di 2 o più dei casi precedenti

$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

Cerco una soluzione particolare per le eq. diff:

$y'' + ay' + by = f_1(t)$ : $\bar{y}(t)$

$y'' + ay' + by = f_2(t)$ : $\bar{\bar{y}}(t)$

$\bar{y} + \bar{\bar{y}}$ è soluzione di $y'' + ay' + by = f_1(t) + f_2(t)$ ? SI

Infatti derivando e sostituendo ho:

$(\bar{y}'' + a\bar{y}' + b\bar{y}) + (\bar{\bar{y}}'' + a\bar{\bar{y}}' + b\bar{\bar{y}}) = f_1(t) + f_2(t)$



ESEMPI

$y'' + 3y' + 2y = t^2 + 2t$

eq. diff. 2° ord, lin., coef cost, completa

$f(t)$ è un polinomio

OMOG ASSOC : $z'' + 3z' + 2z = 0$

EQ CARATTERISTICA : $r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = -1 \quad r_2 = -2$

sol. omog. associata $z(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$

Cerco una soluz. della completa ($b = 2 \neq 0$)

$$\bar{y}(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

$$\bar{y}'(t) = 2a_2 t + a_1$$

$$\bar{y}''(t) = 2a_2$$

Sost. nell'eq. diff.:

$$2a_2 + 6a_2 t + 3a_1 + 2a_2 t^2 + 2a_1 t + 2a_0 = t^2 + 2t$$

$$(2a_2 - 1)t^2 + (6a_2 + 2a_1 - 2)t + 2a_2 + 3a_1 + 2a_0 \equiv 0$$

$$\begin{cases} 2a_2 = 1 \\ 3a_2 + a_1 = 1 \\ 2a_2 + 3a_1 + 2a_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = 1/2 \\ a_1 = -1/2 \\ 1 - 3/2 + 2a_0 = 0 \quad a_0 = 1/4 \end{cases}$$

Sol. particolare $\bar{y}(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t + \frac{1}{4}$

Integrale generale della eq. completa:

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}}$$

ESEMPIO 2 

$y'' + 3y' = t^2 + 1$ Eq. diff. 2° ord. lineare, coeff. cost., completa, $f(t)$ polinomio ; $b = 0$.

↳ omog. associata $z'' + 3z' = 0 \xrightarrow{\text{eq. caratt.}} \tau^2 + 3\tau = 0$ $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = -3$

int. generale dell'omog. associata:

$$z(t) = c_1 e^{0t} + c_2 e^{-3t} = c_1 + c_2 e^{-3t}$$

sol particolare della completa:

$$\bar{y}(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$
$$\bar{y}'(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$
$$\bar{y}''(t) = 6a_3 t + 2a_2$$

sostituisco nell'eq. completa

$$6a_3 t + 2a_2 + 9a_3 t^2 + 6a_2 t + 3a_1 = t^2 + 1$$

$$\begin{cases} 9a_3 = 1 \\ \cancel{6}a_3 + \cancel{6}a_2 = 0 \\ 2a_2 + 3a_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &a_3 = 1/9 \\ &a_2 = -1/9 \\ &3a_1 = 1 + \tfrac{2}{9} \Rightarrow a_1 = \tfrac{11}{27} \end{aligned}$$

Int. generale dell'eq. completa è

$$y(t) = \frac{1}{9}t^3 - \frac{1}{9}t^2 + \frac{11}{27}t + \boxed{a_0 + c_1} + c_2 e^{-3t}$$

---

ma potevo anche scrivere $y'(t) = x(t)$

$x'(t) + 3x(t) = t^2 + 1$ Sol omog: $x(t) = c e^{-3t}$

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x}(t) = at^2 + bt + c \\ &\bar{x}'(t) = 2at + b \end{aligned}\right| \Rightarrow 2at + b + 3at^2 + 3bt + 3c = t^2 + 1$$

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 2a + 3b = 0 \\ b + 3c = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &a = 1/3 \\ &b = -2/9 \\ &c = 11/27 \end{aligned}$$

$x(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t + \frac{11}{27} + c\, e^{-3t}$ $x(t) = y'(t) \ldots$



$$\boxed{f(t) = A e^{\lambda t}}$$

$$\bar{y}(t) = c(t) e^{\lambda t} \Rightarrow \bar{y}' = (c'(t) + \lambda c(t)) e^{\lambda t}$$
$$\bar{y}'' = (c''(t) + 2\lambda c'(t) + \lambda^2 c(t)) e^{\lambda t}$$

$$\cancel{e^{\lambda t}}\left[(c'' + 2\lambda c' + \lambda^2 c) + a(c' + \lambda c) + bc\right] = A\cancel{e^{\lambda t}}$$

$$c'' + c'(2\lambda + a) + (\lambda^2 + a\lambda + b)c = A$$

ove $c, c', c''$ dipendono da $t$

Se:

$\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$ cioè $\lambda$ non è soluz. dell'eq caratt. della omog. associata

prendo come $c(t) = \dfrac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b}$

$\Rightarrow c'(t) = 0$, $c''(t) = 0$

e sostituendo ho un'identità

$\Rightarrow \bar{y}(t) = \dfrac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b} e^{\lambda t}$

Se:

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ma $2\lambda + a \neq 0$

$c'' + c'(2\lambda + a) = A$

se $c' = \dfrac{A}{2\lambda + a}$ $(\Rightarrow c'' = 0)$

l'eq. è soddisfatta $\Rightarrow c(t) = \dfrac{A}{2\lambda + a} t \; (+ c_1)$ $=0$

$\bar{y}(t) = \dfrac{At}{2\lambda + a} e^{\lambda t}$

Se:

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ e $2\lambda + a = 0$

$c'' = A \Rightarrow c' = At \Rightarrow c = \dfrac{A}{2} t^2$

$\bar{y}(t) = \dfrac{At^2}{2} e^{\lambda t}$

$$\boxed{f(t) = A e^{\lambda t} \cos \omega t \qquad e \ \omega \neq 0}$$

esiste una soluzione del tipo

$$\bar{y}(t) = e^{\lambda t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t) \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}?$$

Calcolando $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ e sostituendo si arriva a un sistema di questo tipo

$$\begin{cases} (\lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b)c_1 + (2\lambda\omega + a\omega)c_2 = A \\ -(2\lambda\omega + a\omega)c_1 + (\lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b)c_2 = 0 \end{cases}$$

se $(\lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b)^2 \neq -(2\lambda\omega + a\omega)^2$ esiste una e una sola coppia soluzione $(c_1, c_2) \Rightarrow$ il problema è risolto.

se $(\lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b)^2 + (2\lambda\omega + a\omega)^2 = 0$

allora $\begin{cases} \lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b = 0 \\ \omega(2\lambda + a) = 0 \end{cases} \underset{\omega \neq 0}{\Longrightarrow} \begin{cases} \omega^2 = \lambda^2 + a\lambda + b \\ 2\lambda + a = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -a/2 \\ \omega^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{-a^2}{2} + b = \frac{4b - a^2}{4} = -\frac{\Delta}{4} \end{cases}$$

In questo caso non bastano i coeff. costanti

Ma si prova che una soluz particolare ha la forma

$$\boxed{\bar{y}(t) = k \cdot t \cdot e^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t} \qquad k = \frac{A}{2\omega}$$



$$\boxed{f(t) = A e^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t} \quad \omega \neq 0$$

con $\begin{cases} \lambda = -a/2 \\ \omega^2 = -\Delta/4 \end{cases}$

una soluz particolare ha la forma

$$\boxed{\bar{y}(t) = k t e^{\lambda t} \cos \omega t \qquad \text{con } k = \frac{-A}{2\omega}}$$

---

E se $\boxed{f(t) = \text{polinomio} \cdot \text{esponenziale?}}$

esempio: $y'' + y = e^t(t^2 - 1)$

Riconoscimento ....

omog. associata $z'' + z = 0 \Rightarrow$ eq caratt: $z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{-1}$

l'integr. gen. dell'omogenea è $\qquad \boxed{\alpha = 0 \ \beta = 1}$

$$z(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$$

Soluzione particolare? la cerco tra quelle della forma

- $\bar{y}(t) = (at^2 + bt + c)e^t$

  $\bar{y}'(t) = e^t(at^2 + bt + c + 2at + b) = e^t(at^2 + (b+2a)t + b + c)$

- $\bar{y}''(t) = e^t(at^2 + (b+2a)t + b + c + 2at + b + 2a) =$

  $= e^t(at^2 + (b+4a)t + 2a + 2b + c)$

$$\cancel{e^t}(2at^2 + (2b+4a)t + 2a + 2b + 2c) = (t^2 - 1)\cancel{e^t}$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b + 4a = 0 \\ 2a + 2b + 2c = -1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &a = 1/2 \\ &b = -1 \\ &1 - 2 + 2c = -1 \Rightarrow c = 0 \end{aligned}$$

$$\bar{y}(t) = \left(\tfrac{1}{2}t^2 - t\right)e^t \qquad \Rightarrow y(t) = \left(\tfrac{1}{2}t^2 - t\right)e^t + c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$$

$$y'' - 2y' + y = e^t$$

$z'' - 2z' + z = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$

integrale dell'omogenea

$$z(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 t e^t$$

Quindi $\bar{y}(t) = k e^t$ NON può essere sol della completa e neppure $\bar{y}(t) = kte^t$ " " perchè sono solus. dell'omogenea.

Provo a vedere se $\bar{y}(t) = k t^2 e^t$ può essere una soluzione

$\bar{y}' = k(2t + t^2) e^t \Rightarrow \bar{y}'' = k(4t + t^2 + 2) e^t$

$k\cancel{e^t}(\cancel{4t} + \cancel{t^2} + 2 - \cancel{4t} - \cancel{2t^2} + \cancel{t^2}) = \overset{1}{\cancel{e^t}} \Rightarrow 2k = 1$

$\Rightarrow \bar{y}(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t + c_1 e^t + c_2 t e^t.$

---

$$y'' + y' - 2y = e^t + t$$

sol. omog. ass. $\Rightarrow$ eq. caratt: $r^2 + r - 2 = 0$ $\quad r_1 = 1$, $r_2 = -2$

$z(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$.

Spezzo in due l'equazione e trovo le soluzioni particolari di

$$y'' + y' - 2y = e^t$$
$$y'' + y' - 2y = t$$

Per la seconda: soluzione $\bar{y}(t) = a + bt$, $\bar{y}'(t) = b$, $\bar{y}''(t) = 0$

$0 + b - 2a - 2bt = t \Rightarrow b = -1/2 \quad a = -1/4$

$\Rightarrow \bar{y}(t) = -1/4 - 1/2\, t$



Per la prima osservo che il coeff. $\lambda = 1$ dell'esponente di $e^t$ è soluzione dell'equazione caratteristica, quindi non trovo una soluzione del tipo $\bar{y}(t) = k e^{\lambda t}$ (VEDI PAG 6)

Ma visto che il coefficiente $a = 1$ di $y'$ è $\neq -2\lambda = -2$ una soluzione del tipo $kte^t$ deve esistere.

$\bar{\bar{y}} = kte^t \Rightarrow \bar{\bar{y}}' = ke^t(t+1) \Rightarrow \bar{\bar{y}}'' = ke^t(t+2)$

Sostituisco

$$ke^t(t + 2 + t + 1 - 2t) = e^t$$
$$\Downarrow$$
$$k \cdot 3 = 1$$
$$\Downarrow$$
$$k = 1/3 \Rightarrow \bar{\bar{y}}(t) = \frac{1}{3} t e^t$$

Integrale generale dell'eq.

$$y'' + y' - 2y = e^t + t$$

è allora

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} t + \frac{1}{3} t e^t + c_1 e^t + c_2 e^t}$$