Numeri Complessi

$x^2+1=0$?

"Aggiungiamo" ai numeri reali un SIMBOLO: i

All'incirca: polinomi nell'indeterminata i:

$$\sqrt{2} + 2i - 7i^2 + \frac{1}{\pi} i^3 \quad \dots$$

Ma poniamo $\boxed{i^2=-1}$

$i^3 = i\cdot i^2 = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$.

$\mathbb{C}$: insieme delle scritture $a+ib$ con $a,b\in\mathbb{R}$

- due numeri complessi sono uguali se $a+ib = a'+ib' \iff \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$

- $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$

- $(a+ib)\cdot(c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd = \; (i^2=-1)$
  $= ac - bc + i(ad+bc)$

PROPRIETÀ: le solite algebriche.

zero: $0+0i$

unità: $1+0i$

$-(a+ib) = -a-ib$

$$(a+ib)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\, i$$

$(a+ib)+(0+0i) = (a+0)+(b+0)i = a+bi$

$(a+ib)(1+0i) = a + ib + \underbrace{0ai + 0\cdot b\cdot i^2}_{0}$

potrei cercare il reciproco di $z=a+bi$ $(\neq 0+0i)$ impostando un'equazione del tipo

$(a+ib)(x+iy) = 1+0i$ equazione in x e y

$ax-by + i(ay+bx) = 1+0i$

$\begin{cases} ax-by=1 \\ ay+bx=0 \end{cases}$ $\begin{cases} ax+\frac{b^2}{a}x=1 \\ y=-\frac{b}{a}x \end{cases}$ (purché $a\neq0$)

$\begin{cases} x = \frac{a}{a^2+b^2} \\ y = -\frac{b}{a^2+b^2} \end{cases}$ Se invece $a=0$ il numero z ha la forma $(0+ib)$

e se considero il numero $x+iy$ che ottengo per $a=0$ trovo $0-\frac{1}{b}i$. Che è il reciproco di $(0+ib)$ perché

$$(0+ib)\left(0-\tfrac{1}{b}i\right) = 0-(-1) + \cancel{0\left(-\tfrac{1}{b}i\right) + 0(ib)}$$
$$= 1+0i$$

$$\boxed{(a+ib)^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}(a-ib)}$$

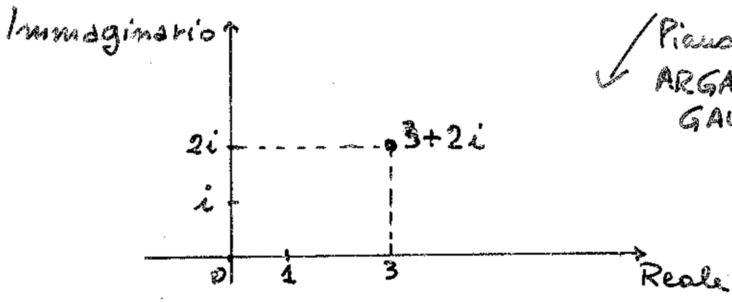
$\mathbb{C}$ è un campo che "contiene $\mathbb{R}$": $\{a+i0\}$

Identifichiamo $\underline{a}$ con $\underline{a+i0}$ (le operazioni definite su $\mathbb{C}$ ristrette al s.i. dei complessi reali si comportano come quelle su $\mathbb{R}$)

Questa è la FORMA ALGEBRICA dei numeri complessi.

Corrispondentemente: FORMA CARTESIANA

$$a+ib \longleftrightarrow (a,b)$$



Piano di ARGAND-GAUSS

Somma ?

Zero ?

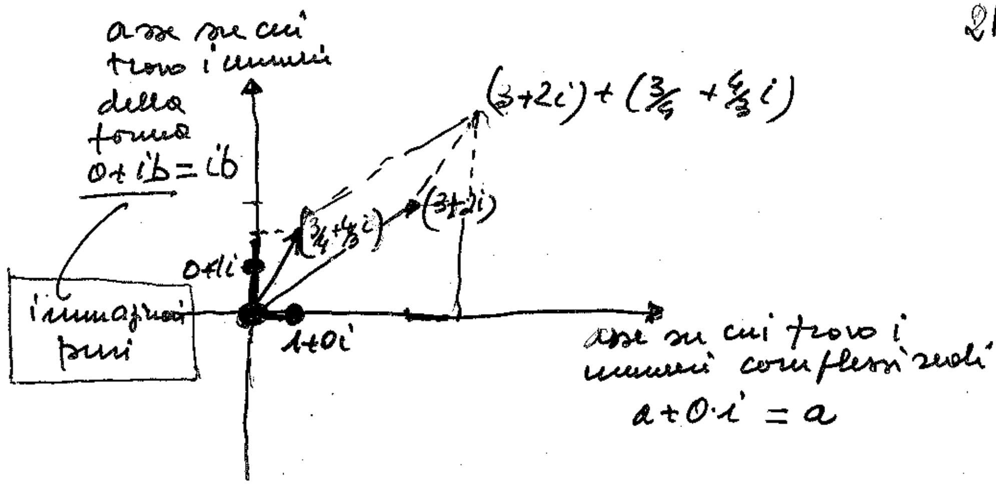
Prodotto ??? → serve passare a coordinate polari

Parte reale di $z=a+ib$: $\mathrm{Re}\,z = a$

Parte immaginaria di z : $\mathrm{Im}\,z = b$

Coniugato di z : $\bar{z} = a-ib = \mathrm{Re}\,z - i\,\mathrm{Im}\,z$

Modulo di z: $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$



quando scrivo il numero complesso nella forma $a+ib$ dico che l'ho rappresentato in forma algebrica.

$$4(2+i) = \boxed{8}+\boxed{4}i \leftarrow \text{F.A.}$$

parte reale   parte immag.

$$2-3i = 2+(-3)i$$

$$(a+ib)^{-1} = \frac{1}{|a+ib|^2}\,\overline{(a+ib)} = \frac{\overline{a+ib}}{(a+ib)\overline{(a+ib)}}$$

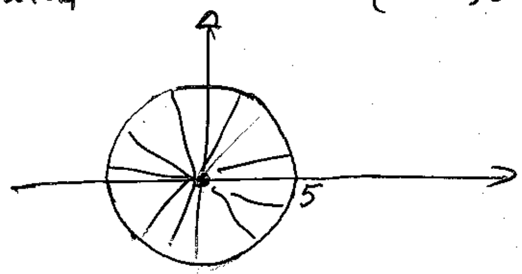
$|z| = 5$

$z = a+ib$

$\sqrt{a^2+b^2} = 5$

$\Downarrow$

$a^2+b^2 = 5^2$



$$z\cdot\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2-(ib)^2 = a^2+b^2$$

Proprietà: $z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$ $\qquad z-\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$

$\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

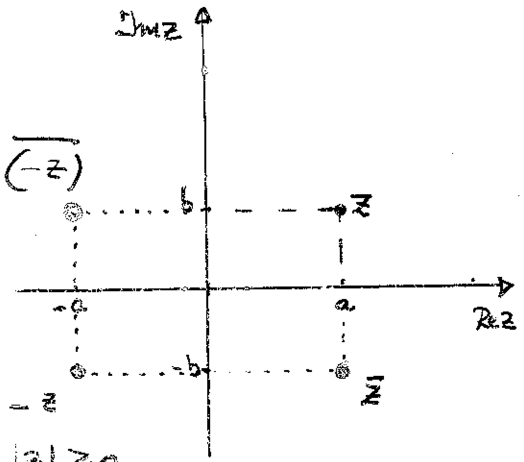
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

$z\cdot\bar{z} = |z|^2$

$\overline{(\mathrm{Re}\,z)} = \mathrm{Re}\,z$

$\overline{i(\mathrm{Im}\,z)} = -(\mathrm{Im}\,z)i$



$|z| \geq 0$

$|\bar{z}| = |z|$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

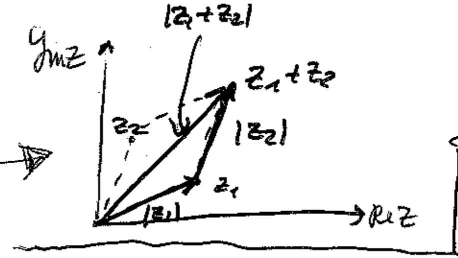
$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \leq |z_1+z_2|$

Trovare la forma algebrica di $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

Quindi $\mathrm{Re}\,z =$ $\qquad \mathrm{Im}\,z =$

$\bar{z} =$ $\qquad |z| =$



FORMA TRIGONOMETRICA: commenti alla pag4

$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i \,\mathrm{sen}\,\theta_1)$

$z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i \,\mathrm{sen}\,\theta_2)$

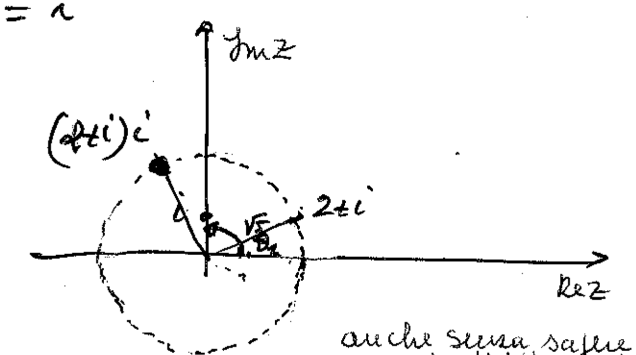
$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left[(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\right] =$

$= \rho_1\rho_2\Big[\underbrace{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2)}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + i\,\underbrace{(\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2)}_{\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)}\Big]$

ESEMPIO:

$z_1 = 2+i$ $\qquad |z_1| = \sqrt{5}$

$z_2 = i$ $\qquad |i| = 1$



$\theta_1: \cos\theta_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\theta_2 = \frac{\pi}{2}$

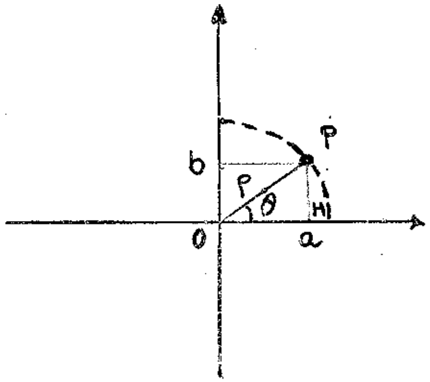
$\theta_1+\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$

anche senza sapere quanto misura $\theta_1+\theta_2$ posso individuare il prodotto sul piano di A-G.

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\cancel{\rho}(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))}{\rho\cancel{^2}} = \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))$

$\bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))$

COORDINATE POLARI



$a = \rho \cos\theta$

$b = \rho \operatorname{sen}\theta$

$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$

$\theta = ??$ Sono infiniti

individuato "modulo 2π"

Argomento di z

Argomento principale di z

$-\pi < \theta \leq \pi$

$z = a + ib = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$: FORMA TRIGONOMETRICA

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\right)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}\left(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)\right)$$

GRAFICAMENTE ?

Trovare argomento principale e modulo di:

$10, \quad 3i, \quad 1+i, \quad \sqrt{3}+i, \quad 1-\sqrt{3}\,i$

Trovare la forma algebrica di

$$z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$$

Ci sono 2 modi:

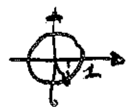
a) "liberarsi" del denominatore

$$z = \frac{(1-i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-\sqrt{3})+i(-\sqrt{3}-1)}{1+1} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$

b) "passare attraverso le rappresentazioni trigonometriche del num. e del denom."

$z_1 = 1 - i\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad |z_1| = \sqrt{1+3} = 2$



θ_1 : $\cos\theta_1 = \frac{1}{2}$ $\operatorname{sen}\theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$\boxed{z = a+ib = \rho\cos\theta + i\rho\operatorname{sen}\theta \quad \cos\theta = \frac{a}{\rho} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho}}$$

$z_2 = 1+i \quad \Rightarrow \quad |z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

θ_2 è tale che $\cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen}\theta_2$

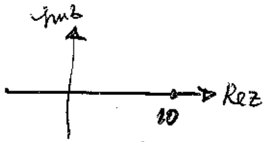
$\theta_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ $\quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \theta_1 + (-\theta_2) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{12}$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$ ecc.

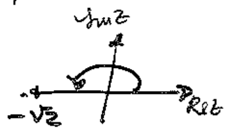
Trovare modulo e argomento di:

$z = 10$



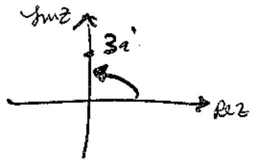
$|z| = 10$ $\quad \arg z = 0 + 2k\pi$

$z = -\sqrt{2}$



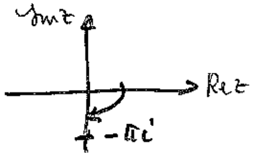
$|z| = \sqrt{2}$ $\quad \arg z = \pi + 2k\pi$

$z = 3i$



$|z| = 3$ $\quad \arg z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

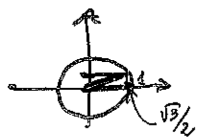
$z = -\pi i$



$|z| = \pi$ $\quad \arg z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Argomento principale di un numero complesso z è l'argomento di z che è compreso nell'intervallo $(-\pi, \pi]$

$z = \sqrt{3} + i$

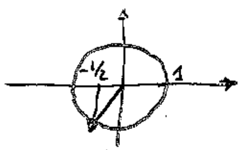


$|z| = \sqrt{3+1} = 2$

$\arg z = \theta$: $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$z = -1 - \sqrt{3}i$



$|z| = \sqrt{1+3} = 2$

$\arg z = \theta$ $\quad \cos\theta = -\frac{1}{2}$ $\quad \operatorname{sen}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\theta = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$$z^3 = z^2 \cdot z = \rho^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)\,\rho\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$
$$= \rho^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)$$

Oss. Se $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$

$$\underbrace{z_1 z_2}_{\text{PRODOTTO}} = \underbrace{(\rho_1\rho_2)}_{\text{PRODOTTO}}\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\right)$$

SOMMA

SE DEFINISCO $\boxed{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = e^{i\theta}}$ POSSO RISCRIVERE TUTTO COME

$$z_1 z_2 = (\rho_1 e^{i\theta_1})(\rho_2 e^{i\theta_2}) \qquad (1° \text{ MEMBRO})$$
$$= (\rho_1\rho_2)\, e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad (2° \text{ MEMBRO})$$

Le due scritture algebriche sono formalmente uguali (leggi sulle potenze). Quindi la def. data è SENSATA.

Per questo si scrive talora

$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = \rho e^{i\theta}}$$

ESERCIZIO

$$(\sqrt{3}+i)^{10} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)\right]^{10} =$$
$$= 2^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right) = \dots$$
$$= 2^{10}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$
$$= 2^9 - 2^9\sqrt{3}\,i =$$
$$= 512 - 512\sqrt{3}\,i$$