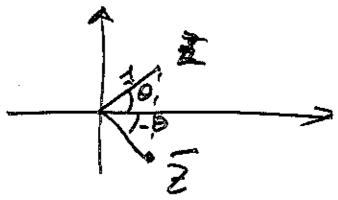
Ancora sulla forma esponenziale di un numero complesso

1

$z = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta = e^{i\theta}$

$\bar{z} = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta = \cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta) = e^{-i\theta}$



$z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z = (2a) = 2\cos\theta$

$e^{i\theta}+e^{-i\theta} =$

$z-\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$

$e^{i\theta}-e^{-i\theta}$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$\Rightarrow$ formule di legame tra $\cos\theta$, $\mathrm{sen}\,\theta$, $e^{i\theta}$ che funzionano nelle eq. diff. lineari del 2° ordine a coeff. costanti OMOGENEE con Δ della eq. caratt. <0 e soluz. $z_1 = a+ib$ $z_2 = a-ib$ di passare dalle soluzioni complesse

$$\lambda e^{(a+ib)t} + \mu e^{(a+ib)t}$$

alle sol. reali

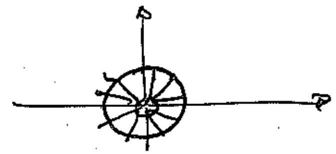
$$\bar{\lambda} e^{at}\cos bt + \bar{\mu} e^{at}\,\mathrm{sen}\,bt$$

($\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ opportuni).

2

Domanda: esiste un ordinamento in $\mathbb{C}$?

Sì: c'è un teor. che lo garantisce. Ad esempio



$z_1 < z_2$ se
- o $\rho_1 < \rho_2$
- oppure se $\rho_1 = \rho_2$ $\theta_1 < \theta_2$

[ove θ_1 è l'arg. princ. di z_1
θ_2 z_2]

Ma non posso inventare un ordinamento coerente con le operazioni.

Infatti supponiamo di poter porre

$$\boxed{i > 0}$$

e diamo per buono che prodotto di numeri >0 deve essere >0

$$-1 = i\cdot i > 0\cdot 0$$

$$-i = i^3 = i\cdot i^2 > 0$$

aggiungo i a entrambi i membri (la disug. si conserva!)

$0 = i - i > i$: $\boxed{i<0}$ ASSURDO

Analogamente non può essere $i<0$

Per questo non posso rappresentare i numeri complessi allineati su una retta orientata, con un verso positivo e uno negativo.

Torniamo alle potenze di un numero espresso in forma trigonometrica

$z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Applicando la formula sul prodotto:

$z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\,2\theta)$

$\vdots$

$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)$

Es. $(\sqrt{3}+i)^3 = 2^3\left(\cos 3\cdot\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,3\cdot\frac{\pi}{6}\right) = 8i$

VERO? VEDI APPUNTI DEL 9/1/2012

Viceversa. (cioè l'equazione $z^n = w$ ha n soluz.)

Sia $w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Esistono esattamente n radici n-esime complesse: $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ di w.

Se $w = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$

e $z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\,\mathrm{sen}\,\theta_k)$ ρ_k, θ_k incognite. Se $z_k^n = w$ allora

si ha: $\rho_k = r^{1/n}$ $\forall k = 0, 1, \dots, n-1$

$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ $\forall k = 0, 1, \dots, n-1$

Sono tutte distinte: non visto a lezione, ma ovvio poiché NON ce ne sono altre.

$\begin{cases} \cos\theta_{k_1} = \cos\theta_{k_2} \\ \mathrm{sen}\,\theta_{k_1} = \mathrm{sen}\,\theta_{k_2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_{k_1} = \theta_{k_2} + 2h\pi$

Esempi:

radice cubica di 1: VEDI PAG 4

rappresentazione grafica:

SPIEGAZIONE

$w = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ $w = z^n$

$z = \rho_k(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi) = \rho_k^n(\cos n\theta_k + i\,\mathrm{sen}\,n\theta_k)$

il modulo di w deve essere ρ_k^n: $r = \rho_k^n$ equazione con incognita ρ_k e in numeri reali > 0 (se $z \neq 0$). $\exists$ una e una sola soluz:

- $\rho_k = \sqrt[n]{r}$

Circa l'argomento posso dire che

$n\theta_k = \varphi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

- $\theta_k = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ con $k \in \mathbb{Z}$

Ho infinite soluzioni? ($k \in \mathbb{Z}$)

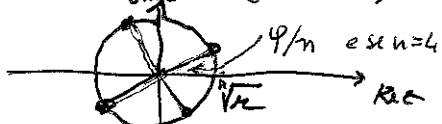
No, ho esattamente n soluzioni poiché se $k \geq n$ si ripetono i precedenti n valori di sen e cos, e analog. se $k < 0$.

È importante scegliere n valori consecutivi per $k \in \mathbb{Z}$.

Le soluz. hanno la forma

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

con $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ (o altri n indici consecutivi)



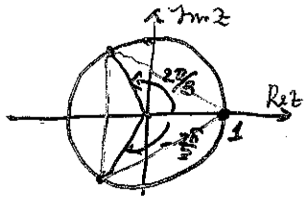
Le radici stanno su un poligono regolare con n vertici centrato in $(0,0)$

Radice cubica di 1 $(n=3)$

$w = 1 \Rightarrow |w| = 1 \quad \arg w = 0 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$|z| = \sqrt[3]{|w|} = \sqrt[3]{1} = 1$

$\arg z = k \cdot \frac{2\pi}{3}$ con $k \in \{0, 1, -1\}$



$z_0 = 1$

$z_1 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$z_2 = \bar{z}_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

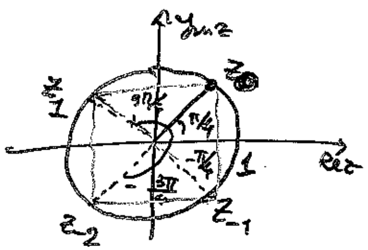
Radice quarta di -1 $(n=4)$

$w = -1 \Rightarrow |w| = 1 \quad \arg w = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$z^4 = w$

$|z| = \sqrt[4]{|w|} = \sqrt[4]{1} = 1$

$\arg z = \frac{\pi + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \{-2, -1, 0, 1\}$



$z_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_{-1} = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_{-2} = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_1 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$= -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$

Radice quarta di $(\sqrt{3}\, i - 1)$ $(n=4)$

$w = -1 + \sqrt{3}\, i \Rightarrow |w| = \sqrt{1+3} = 2$

$\cos\theta = \frac{-1}{2} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

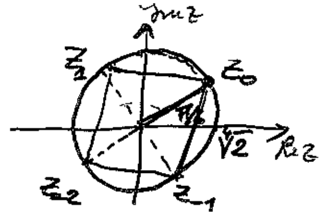
$\arg w = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$z^4 = w$

$|z| = \sqrt[4]{|w|} = \sqrt[4]{2}$

$\arg z = \frac{2\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$

con $k \in \{-2, -1, 0, 1\}$



$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) =$

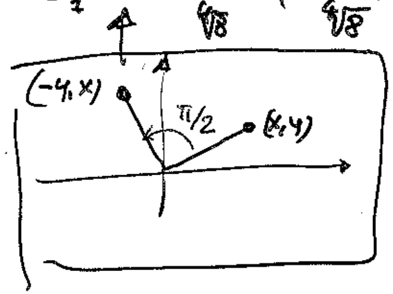
$= \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2} + i\, \sqrt[4]{2} \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} + i\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

$z_{-2} = -z_0 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} - i\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$ in quanto "opposto" di z_0

$z_1 = -\frac{1}{\sqrt[4]{8}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} i \quad \Rightarrow z_{-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{8}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} i$

in quanto opposto.



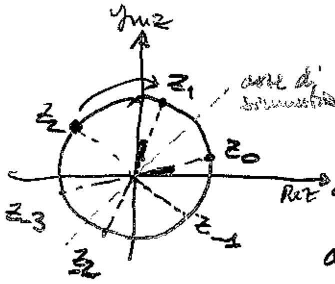
Radici seste di $w = 64i$ $(n=6)$

$|w| = 64$ $\qquad \arg w = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$z^6 = w$

$|z| = \sqrt[6]{|w|} = \sqrt[6]{64} = 2$ $\qquad \arg z = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{6} =$

$= \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$ con $k \in \{-3,-2,-1,0,1,2\}$



$\arg z_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$

$\arg z_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$

$\arg(z_{-1}) = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4}$

$\arg(z_{-2}) = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{7}{12}\pi$

$\arg(z_{-3}) = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11}{12}\pi$

$z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$z_{-1} = -z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 2\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

$= \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

$z_{-2} = -z_1 = \dots$

$z_0 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\,\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

$z_{-3} = -z_0$

radice quarta di -1: VEDI pag 4

rappresentazione grafica:

radice sesta di $64i$ VEDI

rappresentazione grafica:

radice quarta di $\sqrt{3}i - 1$ vedi pag 5

rappresentazione grafica:

Teorema fondamentale dell'algebra: ogni equazione polinomiale di grado n a coefficienti complessi ammette esattamente n radici complesse.

Conseguenze a pag 7bis

$p(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \qquad a_i \in \mathbb{C}$

Siano z_1, z_2 e z_3 le radici che esistono per il T.F.A. Allora

$p(z) = a_3 (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$. Più in generale:

$\Rightarrow$ ogni polinomio complesso di grado n si può scomporre nel prodotto di n polinomi di 1° grado

Se il polinomio ha coeff. reali-complessi ha n radici complesse che sono o reali oppure sono complesse coniugate

$\Rightarrow$ gli unici polinomi a coeff. reali che non posso scomporre in prodotto di polinomi a coeff reali di grado inferiore sono i pol. di 2° grado con discr. < 0. Infatti:

Sia $p(z)$ a coeff reali e sia:

$$p(z) = \underset{\text{reale}}{(z-z_1)}\ \underset{\text{complesso}}{(z-z_2)}(z-\bar{z}_2)(z-z_3)(z-\bar{z}_3)$$

Scomposizione di $p(z)$ pensato come pol. a coeff complessi

$$p(z) = (z-z_1)\left(z^2 - \underbrace{(z_2+\bar{z}_2)}_{2\operatorname{Re} z_2} z + \underbrace{z_2\bar{z}_2}_{|z_2|^2}\right)\left(z^2 - \underbrace{(z_3+\bar{z}_3)}_{=2\operatorname{Re} z_3} z + \underbrace{z_3\bar{z}_3}_{=|z_3|^2}\right)$$

numeri reali

Risolvere

$$|z| = -i z^3$$

per la soluzione uso la scrittura trigonom. di z. ma può vale solo se $z=0$.

Quindi prima mi chiedo: $z=0$ è soluzione?

Sì: una sol. è $z=0$

Supponiamo $z \neq 0$ e scriviamo

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Sostituisco

$$\rho = -i\left(\rho^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)\right)$$

$\rho \neq 0 \Rightarrow$ posso semplificare:

$$1 = -i \cdot \rho^2 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

$$-\frac{1}{i} = \rho^2 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

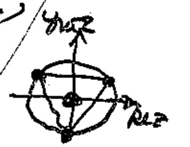
$$\boxed{-\frac{1}{i} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-i \cdot i} = \frac{i}{1} = i}$$

$|i| = 1 \quad \arg i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$i = \rho^2 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 1 & \text{(i due moduli sono uguali)} \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$\Rightarrow \rho = 1 \qquad \theta_k = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \qquad k = -1, 0, 1$



$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \qquad z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$z_{-1} = \cos(-\pi/2) + i \operatorname{sen}(-\pi/2) = -i$

Risolvere le seguenti equazioni:

$iz^3 = \bar{z}$

$4|z| = z^3$

$|z^3| = -4z$ dire a priori quante soluzioni sono complesse NON reali

$(z-i)^4 = 1+\sqrt{3}\,i$

- Supponiamo che una radice 4^a di w sia $z=2-3i$. Determinare le altre radici quarte.
- Supponiamo che una radice 3^a di w sia $z=12-5i$. Determinare le altre radici terze.
- $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ è una radice nona di se stesso?
- Trovare modulo e argomento principale di $z=(1+i)^5$. Rappresentare poi sul piano di A.G. tutte le radici quinte di z.
- Trovare le radici terze di $\frac{i\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{5+3i}$

Suggerimenti: le prime 3 equazioni si risolvono usando la pesariga dell'esercizio a pag 8. Per la prima osservare che, se $z \neq 0$ tale equazione equivale a

$iz^3 \cdot z = \bar{z} \cdot z$ ....

La quarta equazione è una formulazione lievemente diversa da $z^4 = w$ ....

Suggerimenti: trovare le radici 4^e (o 3^e) di 1 e osservare che le "altre radici" di w sono il prodotto di z con le radici 4^e (o 3^e) di 1. PERCHÉ?

Suggerimenti: che cosa significa la frase "w è radice 9 di w"?

Suggerimenti: per la prima parte scrivere la base in forma trigonometrica e ... procedere. Per la seconda rifarsi al secondo esercizio o alla teoria a pag 3bis

Suggerimenti: trovare la forma algebrica del numero complesso