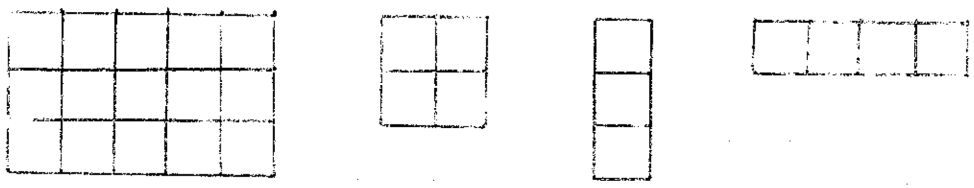
MATRICI



Matrice di tipo (m,n) o a m RIGHE (orizzontali) e n COLONNE (verticali) è un insieme di $\boxed{m \cdot n}$ numeri reali disposti in tabella

MATRICI QUADRATE	(n,n)
VETTORI RIGA	$(1,n)$
VETTORI COLONNA	$(m,1)$

Si scrive
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

A, B di tipo (m,n), o $m \times n$

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1,\dots,m, \ \forall j = 1,\dots,n$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad tA = (t a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Spazio vettoriale delle matrici (m,n)

Il prodotto tra matrici <u>non si fa</u> COMPONENTE PER COMPONENTE bensì RIGHE PER COLONNE

$$(a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}$$

ATTENZIONE: è un prodotto scalare

In generale

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\boxed{m,n}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1h} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nh} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}}_{\boxed{n,p}} = \underbrace{\begin{pmatrix} & \text{colonna } h & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{jh} & \end{pmatrix}}_{\boxed{m,p}}$$

elem. di posto (k,h)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 4 \\ x \quad\quad + 7z = 1 \end{cases} \longrightarrow$$

X	Y	Z	Noto
2	-3	5	4
1	0	7	1

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{parentesi}$$

Non barre

7 è l'elemento di posto $(2,3)$

Elemento di posto (k,h) di una matrice prodotto:

$$c_{kh} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{jh}$$

Esempio

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\boxed{4 \times 5}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\boxed{5 \times 3}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Conti:

$$\begin{bmatrix} 1\cdot1 + 0(-1) + 0\cdot1 + (-1)\cdot0 & 1\cdot0 + 0 + 0 + 0 + (-1)\cdot2 & 1\cdot2 + 0 + 0 + 0 - 1\cdot5 \\ 1\cdot0 - 1\cdot0 & 1(-1) + (-1)\cdot2 & 1\cdot3 - 1\cdot5 \\ -1\cdot1 + 1\cdot0 & -1\cdot1 + 1\cdot2 & -1\cdot1 + 1\cdot5 \\ -1\cdot1 + 1\cdot(-1) & 0 + 4 & -2 + 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici devono essere conformabili perché si possa fare il prodotto.

$A = (1, -1, 0)$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $AB =$, $BA =$

Come sono AB e BA?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $AB =$, $BA =$

Come sono AB e BA?

Comunque: prodotto associativo e distributivo

A di tipo (m,n), B (n,p), C (p,q) $\Longrightarrow (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

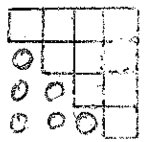
A, B di tipo (m,n), C (n,p) $\Longrightarrow (A+B) \cdot C = AC + BC$

MATR. QUADRATE

Matrice identica $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$: ininfluente nel prodotto

Matrici diagonali (quadrate)

Matrici triangolari (ALTE o BASSE)



Matrici rettangolari ridotte.

Matrici trasposte

$(1, -1, 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (3 - 2) = (1)$ [deve venire una matrice non un numero]

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, 0) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$: quindi il prodotto non è commutativo anche se sono conformabili nei due sensi.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 2 \\ 3+4\cdot 0 & 3\cdot 0+2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$: quindi il prodotto non è commutativo neanche se le matrici prodotto hanno lo stesso formato.

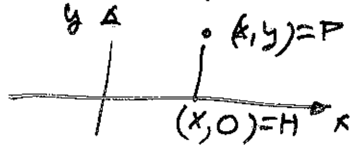
Matrice identica 3×3

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

matrici come funzioni da uno spazio vettoriale a un altro... ad es. pensiamo alla proiezione che manda $P \in \mathbb{R}^2$ in $H \in \mathbb{R}^2$

Matrici: quando ha senso chiedersi se sono invertibili?



$\begin{cases} x' = x \\ y' = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \cdot x + 0y \\ y' = 0x + 0y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

non esiste nessuna matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

tali che

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\shortparallel} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

perché questi due elementi sono diversi ... o geometricamente perché dato H come ricostruisco P ?

Non tutte le matrici (quadrate) $\neq$ dalla matrice nulla $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ sono invertibili.

Andremo a dare condizioni di invertibilità.

Comunque dovranno almeno essere matrici quadrate.

Altre matrici quadrate particolari

Matrici diagonali. Ad es. $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix} =$

$= \text{diag}(2, 5, -1, 0)$

diagonale principale

Matrici triangolari alte. ES:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

basse ES. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

matrice ridotta

↳ metodo di GAUSS

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trasposta di $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

è la matrice $A^T = (b_{hk})_{\substack{h=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m}}$

con $b_{hk} = a_{kh}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTE di una matrice QUADRATA

(Se la matrice NON è quadrata, NON c'è determinante)

Connessioni:

- PROBLEMA DELL'INVERTIBILITÀ DELLA MATRICE
- RANGO DI UNA MATRICE (m,n)
- RISOLUBILITÀ DI SISTEMI LINEARI (m,n)
- RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI (m,n)
- INDIPENDENZA DI UN INSIEME DI VETTORI
- CALCOLO AUTOVALORI DI UNA MATRICE QUADR.

Ne diamo una definizione ricorsiva basata su qualche esperienza precedente.
Quando è indipendente l'insieme di

- 1 vettore di $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$: $\underline{u} = (a_{11})$
- 2 vettori di $\mathbb{R}^2$: $\underline{u} = (a_{11}, a_{12})$, $\underline{v} = (a_{21}, a_{22})$
- 3 vettori di $\mathbb{R}^3$: $\underline{u} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$
  $\underline{v} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$
  $\underline{w} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$?

Risposta:

- $\underline{u} \neq \underline{0} \Rightarrow a_{11} \neq 0$
- $\underline{u} \neq t\underline{v}$ e $\underline{v} \neq \underline{0} \Rightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$
- $\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) \neq 0 \Rightarrow a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \neq 0$

$$\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2\,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix}$$

sulla falsariga di quanto visto per $n=3$

Chiamo determinante delle matrici

$$(a_{11}) \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

"il numero che risulta .... determinante per stabilire se i vettori riga che compaiono in queste matrici sono indipendenti". Cioè

DEFINIZIONE. Sia $A=(a_{ij})$ quadrata di ordine n. Il determinante di A è un numero reale così definito:

- se $n=1$: $\det(a_{11}) = a_{11}$
- se $n=2$: $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Più in generale, supposto di aver definito il determinante di matrici di ordine $n-1$,

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} + \dots (-1)^{n+1} a_{n1}M_{n1}$$

ove M_{i1} è il determinante della matrice che si ottiene da A togliendo la 1ª colonna e la i-esima riga.

TERMINOLOGIA: M_{i1} MINORE COMPLEMENTARE di a_{i1}

$A_{i1} = (-1)^{i+1} M_{i1}$: COMPLEMENTO ALGEBRICO di a_{i1}

La terminologia si estende a M_{ij}, A_{ij}

Vale il

TEOREMA di LAPLACE. Comunque si scelga $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\det A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk}$$

CALCOLO PER COLONNE (colonna k-esima)

$$= a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots + a_{kn}A_{kn}$$

CALCOLO PER RIGHE (riga k-esima)

Es. 1) $\det\begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$ A pag 6

2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ A pag 6

3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$ A pag 6

PROPRIETÀ. (PER COLONNE: rileggerle poi per RIGHE)

1) Se in A c'è una colonna di zeri: $\det A = 0$

2) Se A' è ottenuta da A scambiando due colonne, $\det A' = -\det A$

Es: $\begin{vmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & -6 & 4 \end{vmatrix} =$

- Conseguenza: se in A 2 colonne sono $=$: $\det A' = \det A = 0$

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ \boxed{-6} & \boxed{0} & \boxed{4} \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(-6)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot 0\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} +$$

(3,1)

$$+ (-1)^{3+3}\, 4 \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -6(-10+3) + 0 + 4(24-8) = 42 + 64 = 106$$

oppure

(1,2)

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\cdot 2 \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 3 \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -2(16-30) + 3(32-6) =$$

$$= 28 + 78 = 106$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\,|\cdots| + 0\,|\cdots| +$$

$$-1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1(0-1) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot(-1)\, 4\cdot 2$$

Il det è prodotto degli elementi sulla diagonale principale.