ES. a richiesta: trovare le sol. di

$$iz^3 = \bar{z}$$

se sostituisco $z = a+ib$
$\bar{z} = a-ib$

$$z^3 = a^3-3a^2ib-3ab^2-ib^3$$

è probabilmente complicato

z può essere $=0$?

$\Updownarrow$

$i\,0^3 = \bar{0}$ sì $\Rightarrow$ $z=0$ è una soluzione

Suppongo $z \neq 0$ $\Rightarrow$ $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

$iz^3z = \bar{z}z$ cioè $iz^4 = |z|^2$

$i\rho^4(\cos 4\theta + i\,\mathrm{sen}\,4\theta) = \rho^2$ $\quad\Swarrow$ ρ è $\neq 0$

$i\rho^2(\cos 4\theta + i\,\mathrm{sen}\,4\theta) = 1$

moltiplico per $-i$
$(i\cdot(-i)=1)$

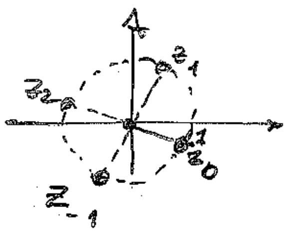
$$\boxed{\rho^2(\cos 4\theta + i\,\mathrm{sen}\,4\theta) = -i}$$

ρ^2 è il modulo del numero "a sinistra nell'equaz."
$\wedge$ " " "a destra " " "

$\rho^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\rho = 1}$ poiché $\rho > 0$

4θ è l'argomento del num. "a sinistra nell'eq."
$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ " " "a destra " " "

$$4\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$



$\cos \pi/8$? $\quad 2\cos^2 \pi/8 = 1 + \cos\pi/4$

$$\cos\pi/8 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

$\mathrm{sen}\,\pi/8$? $\quad 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,\pi/8 = \cos\pi/4$

$$\mathrm{sen}\,\pi/8 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

1

$$z_0 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} = -z_2$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = z_{-1}$$

Proprietà del determinante.

1) se in A c'è una riga (colonna) di zeri, $\det A = 0$

2) se A' è ottenuta da A scambiando 2 righe (o due colonne)
$$\det A' = -\det A$$

$\Rightarrow$ se in A ci sono due righe o colonne uguali: $\det A' = \det A = 0$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \quad \text{poiché} \quad \boxed{\text{proprietà 2}}$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad -(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Esempio:

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -6 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & -5 \\ 8 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -6(-3+10) + 4(8-24) = -42 - 64 = -106$$

Ma

$$\begin{vmatrix} -6 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 106$$

Se in A 2 righe coincidenti $\Rightarrow \det A = 0$

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

le scambio $A' = A$

so che $\det A' = -\det A$ cioè

$$\det A = -\det A$$
$$\Downarrow$$
$$\det A = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$\boxed{\text{proprietà 3}}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$\boxed{\text{proprietà 4}}$

$$= a_{22}(a_{11}+a_{21}) - a_{21}(a_{12}+a_{22}) =$$

$$= a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{= 0}$$

Vedi pag. successiva per gli enunciati

3) Moltiplicando per $\lambda \in \mathbb{R}$ una colonna di A si ha una matrice A' con: $\det A' = \lambda \det A$.

- Conseguenza (1): $\det(\lambda A) = \lambda^n |A|$
- Conseguenza (2): se A contiene colonne proporzionali, $\det A = 0$

4) Aggiungendo a una colonna una combinazione lineare delle altre, il determinante non cambia

ES. Ricalcolare (SOTTRAZIONE DI COLONNE e CALCOLO X RIGHE)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

infatti colonne se una colonna è comb. lin. delle altre...

5) TEOREMA DI BINET: A, B quadrate di ordine $n \Rightarrow$

$$\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)$$

6) $\det A^T = \det A$

Rileggere PRODOTTO VETTORIALE e MISTO in termini di DETERMINANTI 3x3.

MATRICI INVERSE

B è detta inversa di A se: $AB = BA = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Si denota l'inversa di A con A^{-1} e si dice che A è INVERTIBILE.

Se esiste A^{-1} : $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ ed entrambi sono NON NULLI.

VICEVERSA:

se $\det A \neq 0$ esiste A^{-1} e si calcola come

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Concretamente (conseguenze della proprietà 4)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

prendo la 1ª riga, la moltiplico per (−3) e la sommo alla 2ª;

prendo la 1ª riga la moltiplico per (−2) e la sommo alla 3ª

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3-3 & 5+3 & 4+0 \\ 2-2 & 7+2 & 1+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 9 & 1 \end{vmatrix} =$$

prendo la 2ª riga la moltiplico per $-9/8$ e la sommo alla 3ª

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 9-9 & 1-\frac{9}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & -7/2 \end{vmatrix} =$$

sono arrivato a matrice triangolare

$$= 1 \cdot 8 \cdot (-7/2)$$

Altro esempio:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

la matrice quadrata di ordine n A è invertibile se esiste una matrice B di ordine n tale che $AB = I$

$$\det(AB) = \det I = 1 \quad : \quad \det A \cdot \det B = 1$$

e quindi se A è invertibile $\det A \neq 0$

Spiegazione del calcolo della matrice inversa

(4)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$
$$= a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}$$
$$= a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}$$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}} \overset{A^C}{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}} =$$

$$\begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = (\det A) \cdot I$$

$$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Se $\det A \neq 0$:

$$\Rightarrow A \cdot \frac{A^C}{\det A} = I$$

Calcolare, se esiste l'inversa di:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det A = 1 \cdot (-1) \cdot 2 = -2 \neq 0$

$\exists A^{-1}$

$$A^C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -4 & 9 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9/2 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

matrice della rotazione di angolo α

Se $ad - bc \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

V18 5

Sistemi lineari =

Sistemi di EQUAZIONI algebriche di 1° grado.

Numero di equazioni : m
" " incognite : n } non è detto che coincidano

Convenzione: al primo membro le incognite
" secondo " i "termini noti"

Raffinamento [illegible]: le incognite di ogni equazione si scrivono nello stesso ordine.

Es: $\begin{cases} 6x - 3y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} 4x - \frac{1}{3}y + z = 0 \\ \sqrt{2}y - z = 0 \end{cases}$

Entrambi sistemi di 2 equazioni in 3 incognite.
Il secondo sarà detto

OMOGENEO

poiché i termini noti sono nulli.

- Tutti i sistemi omogenei hanno almeno 1 soluzione(*): $(x,y,z) = (0,0,0)$

- Ma non è detto che sia l'unica. Nell'esempio:
$\begin{cases} x = \frac{4}{4}(\frac{1}{3} - \sqrt{2})t \\ y = t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}$ al variare di t in $\mathbb{R}$ sono ~~tutte~~ soluzioni.

Geometricamente:

E nel primo esempio?

(*) ATTENZIONE: [illegible] sono n-uple ordinate soddisfacenti tutte le [illegible] del sistema.

V19

In un sistema lineare le cose importanti sono:
- i coefficienti delle incognite
- i termini noti.

Le incognite sono dei "SEGNAPOSTO" così come le equazioni.

Riarrangio gli elementi del sistema in una matrice così:

$\begin{cases} 6x - 3y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$

6	-3	2
2	-1	1

MATRICE DEI COEFFICIENTI del sistema

6	-3	2	4
2	-1	1	2

MATRICE ORLATA CON I TERMINI NOTI

In particolare si può rileggere il sistema di equazioni come un'unica equazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

SIMBOLOGIA $A\underline{x} = \underline{b}$

Colonna delle incognite — colonna dei termini noti

E' in vista di questa rappresentazione che abbiamo adottato le convenzioni iniziali!

D'altra parte questa rappresentazione rende più evidente perché penso alle soluzioni del sistema come n-uple ordinate.

Per i sistemi (così come per le singole equazioni) possono presentarsi 3 casi

1. non esistono soluzioni. ES. $\begin{cases} 6x - 3y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$
SISTEMA IMPOSSIBILE

RISOLUBILI
2. esistono soluzioni, ma sono infinite ES. $\begin{cases} 6x - 3y = 4 \\ 2x - y = 4/3 \end{cases}$
SISTEMA INDETERMINATO
3. esiste 1 e 1 sola soluzione ES. $\begin{cases} 6x - y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$
SISTEMA DETERMINATO

Sistemi lineari di n equazioni in n incognite V20 (6)

Matrice dei coefficienti: quadrata. La chiamo A:

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

Risolvo il sistema "come se" fosse un'equazione del tipo $ax=b$: se $a\neq 0$, $x=a^{-1}b$.

Nel caso delle matrici A^{-1} c'è se $\det A\neq 0$.

Dunque:

se $\det A\neq 0$ il sistema ammette 1 e 1 sola soluzione

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

se $\det A=0$ può darsi che il sistema sia indeterminato oppure che sia impossibile. VEDI POI.

Tornando al caso $\det A\neq 0$ ... concretamente?

Guardo come vanno le cose per $n=2$:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}b_1+A_{21}b_2\\A_{12}b_1+A_{22}b_2\end{pmatrix}$$

determinante della matrice che si ottiene da A sostituendo alla 1ª colonna $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$

analogo sulla 2ª colonna

$$\Rightarrow x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}}{\det A}\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}}{\det A}$$

... si generalizza a n qualunque

$$\begin{cases}2x-y+3z=1\\4x+y+z=0\\2x+2y-3z=1\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&1&1\\2&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2&-1&3\\4&1&1\\2&2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&2\\0&3&-5\\0&3&-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&2\\0&3&-5\\0&0&-1\end{vmatrix}=-6$$

$\neq 0 \Rightarrow$ il sist. ha 1 e una sola sol.

$$\begin{cases}x=\dfrac{\begin{vmatrix}1&-1&3\\0&1&1\\1&2&-3\end{vmatrix}}{-6}=\dfrac{\begin{vmatrix}1&-1&3\\0&1&1\\0&3&-6\end{vmatrix}}{-6}=\dfrac{-9}{-6}=\dfrac{3}{2}\\[2em]y=\dfrac{\begin{vmatrix}2&1&3\\4&0&1\\2&1&-3\end{vmatrix}}{-6}=\dfrac{\begin{vmatrix}2&1&3\\4&0&1\\0&0&-6\end{vmatrix}}{-6}=\dfrac{24}{-6}=-4\\[2em]z=\dfrac{\begin{vmatrix}2&-1&1\\4&1&0\\2&2&1\end{vmatrix}}{-6}=\dfrac{\begin{vmatrix}2&-1&1\\4&1&0\\0&-3&0\end{vmatrix}}{-6}=\dfrac{-12}{-6}=2\end{cases}$$

La sol del sistema è $(x,y,z)=\left(\frac{3}{2},-4,2\right)$