$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3x+y+2z=5 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$$

Metodo di eliminazione di <u>GAUSS</u> – JORDAN

elimino via via le variabili, rendendo più algoritmico il metodo di sostituzione

Matrice associata <u>completa</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Faccio comparire sotto la diagonale principale tanti zeri quanti sono i posti

Moltiplico la prima riga per (-3) e sommo alla 2ª
" (-2) 3ª

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3-3 & 1-3\cdot 2 & 2-3(-1) & 5-3\cdot 0 \\ 2-2 & 3-2\cdot 2 & -1-2(-1) & 1-2\cdot 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Moltiplico la seconda riga per $-\frac{1}{5}$ e sommo alla 3ª

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & -1-(-1) & 1-\frac{1}{5}\cdot 5 & 1-\frac{1}{5}\cdot 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 1x+2y-1z=0 \\ 0x-5y+5z=5 \\ 0x+0y+0z=0 \quad \text{identità} \end{cases}$$

moltiplico la seconda riga per $-\frac{1}{5}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

sottraggo 2 volte la 2a riga alla prima

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x+z=2 \\ y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-t \\ y=t-1 \\ z=t \end{cases}$$ è la soluz.

Avremmo potuto applicare il metodo di Cramer? NO!

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ha determinante} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e quindi

a) a priori non avrei potuto garantire l'esistenza di soluzioni

b) se esistono soluzioni, non sono uniche

$$\begin{cases} x+y-2z+3t=1 \\ -x+y+5z+t=2 \\ 3x-y-12z+t=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -12 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Sommo R1 a R2

sottraggo 3 volte R1 a R3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1+1 & 1+1 & 5-2 & 3+1 & 1+2 \\ 3-3 & -1-3 & -12+6 & 1-9 & 0-3 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -6 & -8 & -3 \end{array}\right)$$

Sommo 2 volte R2 a R3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+y-2z-3t=1 \\ 2y+3z+4t=3 \\ 0=3 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE: non esiste soluzione.

Risolubilità di un sistema.
Che cosa significa? Prendiamo ad es.

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=1 \\ -x+2y=-5 \end{cases}$$

una possibile riscrittura in termini di matrici è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad A\underline{x} = \underline{b}$$

Ma posso anche dire che questo significa

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

cioè $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare dei vettori colonna della matrice dei coefficienti e quindi NE È LINEARM. DIPENDENTE
e quindi il sistema è risolubile se e solo se il numero di vettori indipendenti nella matrice A dei coefficienti è uguale al numero di vettori indipend. della matrice completa $(A|\underline{b})$
(Rouché-Capelli). Serve individuare bene questo "numero"

Rango di una matrice

Fondamentale per stabilire se un sistema è o no risolubile.

Il rango di A è il massimo numero di vettori riga (o colonna: è lo stesso) linearmente indipendenti che stanno in A.
... non è la definizione ufficiale del testo ma serve a non fare conti inutili.

ES. rango di $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} =$

Se non si vede a occhio ... diamo questa definizione (equivalente):

rango di A è il più grande intero r ($\leq \min(m,n)$) tale che esista in A una sottomatrice quadrata di ordine r con determinante $\neq 0$.

ES. Se A è quadrata e $\det A \neq 0$, $\operatorname{rg} A = n$.

ES. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ ha rango 2 perché ...

ES. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango 2 perché $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

vedi pag succ. per i conti

(5) V23

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

A è 4×3 $\Longrightarrow 0 \le rgA \le 3$

ma visto che $A \neq 0$

certamente $1 \le rg A \le 3$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5 \neq 0 \Longrightarrow 2 \le rgA \le 3$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 13 - 26 + 13 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 7 - 14 + 7 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -11 + 22 - 11 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = +44 - 33 - 11 = 0$$

Tutti i det. delle matrici 3×3 che si possono estrarre da A sono $=0$ $\Longrightarrow rgA \neq 3 \Rightarrow rgA = 2$

È scomodo.

Per abbreviare, usare la seguente condizione sufficiente

$rg A = r$ se e solo se esiste una sottomatrice quadrata di A di ordine r con determinante $\neq 0$ e tutte le sottomatrici di ordine $r+1$ che si ottengono orlando tale matrice .... hanno determinante nullo. (KRONECKER)

Nel caso precedente
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow rg A = 2$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

ESERCIZIO.

Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} 7 & 2K & \boxed{8} & \boxed{9} \\ 1 & -2 & K & K+1 \\ 2K & 1 & \boxed{5} & \boxed{6} \end{pmatrix}$ al variare del numero reale k

Vedi pag succ.

Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} 7 & 2k & \boxed{8 \quad 9} \\ 1 & -2 & k \quad k+1 \\ 2k & 1 & \boxed{5 \quad 6} \end{pmatrix} = A$ $\quad k \in \mathbb{R}$ $\quad$ 7

A è 3×4, non tutti i suoi elem. sono nulli $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 1 \leq rg A \leq 3$

$|A'| = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 48 - 45 = 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, A'$ di ordine 2 con $\det \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq rg A \leq 3$

KRONECKER

$$\begin{vmatrix} 2k & 8 & 9 \\ -2 & k & k+1 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ k & k+1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2k & 9 \\ -2 & k+1 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 2k & 8 \\ -2 & k \end{vmatrix} =$$

$$= 8k + 8 - 9k - 5(2k^2 + 2k + 18) + 6(2k^2 + 16) =$$

$$= 2k^2 - 11k + 14 = 0 \quad ?$$

$$k = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 112}}{4} = \frac{11 \pm 3}{4} = \begin{cases} 7/2 \\ 2 \end{cases}$$

La matrice A se $k \neq 2, 7/2$ ha rango 3

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & k & k+1 \\ 2k & 5 & 6 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} k & k+1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ 2k & 6 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 1 & k \\ 2k & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(k-5) - 8(6 - 2k - 2k^2) + 9(5 - 2k^2) =$$

$$= -38 + 23k - 2k^2 \quad \text{questo determinante}$$

per $k = 2$: $\quad -38 + 46 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ se $k = 2 \quad rg A = 2$

per $k = 7/2$ $\quad -38 + 23 \cdot 7/2 - 49/2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ se $k = 7/2 \quad rg A = 3$

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è risolubile $\Leftrightarrow rg(A) = rg(A|\underline{b})$

Es.

$$\begin{cases} x \quad\quad\quad + w = k \\ \quad y + z \quad\quad = k-1 \\ x \quad + z \quad\quad = 2k-1 \\ \quad y \quad\quad + w = k-3 \end{cases}$$

è risolubile se ...

... e in tal caso le soluzioni sono ......

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} k \\ k-1 \\ 2k-1 \\ k-3 \end{pmatrix}$$

A'

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq rg A \leq 3$$

$$|A'| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad rg A = 3$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 1 & 1 & 0 & k-1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2k-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & k-3 \end{array}\right) \quad 3 = rg A \leq rg(A|b) \leq 4$$

so che $|A'| \neq 0 \Rightarrow$ orlo A' in tutti i modi possibili

$|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 & k-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2k-1 \\ 0 & 1 & 0 & k-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k-1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + k - 1 = 0$$

per $k = 3$ $rg(A|b) = 3$ poiché entrambe le matrici ottenute orlando A' hanno $\det = 0$.

Dunque, una volta stabilito che il sistema

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

è risolubile, per la soluzione procedo così:

- isolo la sottomatrice A'' di A che ha rango massimo; quella che ho trovato per garantire: $rg\,A = rg(A|\underline{b}) = r$

  tutte le altre righe di $(A|\underline{b})$ dipendono linearm. dalle righe di $(A|\underline{b})$ che contengono questa sottomatrice: quindi le corrispondenti equazioni nel sistema risultano INUTILI per la soluzione e di conseguenza

- elimino tali $m-r$ equazioni.

  Così ho un sistema $A'\underline{x} = \underline{b}$ di r equazioni in n incognite, avente rango massimo.

- penso come vere incognite quelle corrispondenti alle colonne di A'', mentre uso le altre come parametri e conseguentemente porto queste $n-r$ parametri (con relativi coefficienti) al 2° membro: avrò una colonna di termini noti dipendente da parametri

- Risolvo il sistema di r equazioni in r incognite risultante, ad es. col metodo di Cramer: se queste incognite si chiamano $x_1, \dots, x_r$, le soluzioni sono del tipo

  $$x_1 = f_1(k_{r+1}, \dots, k_n), \dots, x_r = f_r(k_{r+1}, \dots, k_n), x_{r+1} = k_{r+1}, \dots, x_n = k_n$$

  con $k_{r+1}, \dots, k_n$ variabili comunque in $\mathbb{R}$ e $f_1, \dots, f_r$ funzioni razionali fratte in $k_{r+1}, \dots, k_n$

  $\Rightarrow \infty^{n-r}$ SOLUZIONI. Spiegazione su esercizio a lato:

Torno al 1° esercizio

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) = (A \mid \underline{b})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A'' = -5 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$rg\,A = 2$

$rg(A|\underline{b}) = 2$

Butto via l'ultima riga (visto che non entra in gioco in $|A''|$) e riscrivo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Decido che z (i cui coeff. non entrano in A'') è il parametro: $z = t$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y = t \\ 3x + y = 5 - 2t \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & t \\ 3 & 1 & 5-2t \end{array}\right]$$

questo sistema permette di ricavare le incognite x e y. Ne segue

$$(x, y, z) = \left(\frac{\begin{vmatrix} t & 2 \\ 5-2t & 1 \end{vmatrix}}{-5}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & t \\ 3 & 5-2t \end{vmatrix}}{-5}, t \right)$$

Ovviamente questo ha un valore teorico. Per calcolare le soluzioni, meglio GAUSS-JORDAN